Física

Fundamentos teórico-prácticos de trabajo, potencia, energía y cantidad de movimiento lineal para ciencias e ingenierías

Diego Guillermo Barba Maggi
Bernardo Ezequiel Barba Barba

ESPOCH

2025

Física. Fundamentos teórico-práctivos de trabajo, potencia, energía y cantidad de movimiento lineal para ciencias e ingenierías

Física. Fundamentos teórico-prácticos de trabajo, potencia, energía y cantidad de movimiento lineal para ciencias e ingenierías

Diego Guillermo Barba Maggi
Bernardo Ezequiel Barba Barba

Decanato
de Publicaciones

espoch

Física. Fundamentos teórico-prácticos de trabajo, potencia, energía y cantidad de movimiento lineal para ciencias e ingenierías

Panamericana Sur, kilómetro 1 ½
Decanato de Publicaciones
Riobamba, Ecuador
Teléfono: 593 (03) 2 998-200
Código Postal: EC0600155

Aval ESPOCH
Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego (*peer review*)

Corrección y diseño:
La Caracola Editores

Impreso en Ecuador

CDU: 531
Física. Fundamentos teórico-prácticos de trabajo, potencia, energía y cantidad de movimiento lineal para ciencias e ingenierías
Riobamba: Escuela Superior Politécnica de Chimborazo
Decanato de Publicaciones, 2024
163 pp. vol: 17,6 x 25 cm
ISBN: 978-9942-51-073-0
1. Física
2. Trabajo
3. Potencia
4. Energía
5. Cantidad de movimiento

Esta tercera obra de Física para ciencias e ingenierías la dedicamos a los jóvenes ecuatorianos que inician sus estudios en carreras técnico-científicas, disponen de una obra sencilla, escrita con un lenguaje adecuado y con gran cantidad de problemas reales de mecánica clásica orienta al trabajo, potencia y energía, así como a la cantidad de movimiento lineal. Les invitamos a leerla desde su fundamentación teórica, aprovechen la gran cantidad de ejercicios resueltos y finalmente practiquen con las misceláneas de ejercicios propuestos.

Los autores.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

Glosario

$\vec{g}$	Aceleración de la gravedad.
$\overrightarrow{a_{CM}}$	Aceleración del centro de masa.
$\vec{a_R}$	Aceleración radial o centrípeta.
$\vec{a_t}$	Aceleración tangencial.
y_{max}	Altura máxima.
b	Brazo del momento.
$c.g.$	Centro de gravedad.
$C.M.$	Centro de masa.
μ_C	Coeficiente de rozamiento cinético.
μ_S	Coeficiente de rozamiento estático.
K	Constante elástica.
$\vec{\Delta}r$	Desplazamiento.
$d.c.l$	Diagrama del cuerpo libre.
D	Diámetro.
Dr	Distancia recorrida.
E	Energía
EC	Energía cinética.
EC^{τ}	Energía cinética rotacional.
EM	Energía mecánica.
EP_E	Energía potencial elástica.
EP_g	Energía potencial gravitacional.
EP^{τ}	Energía potencial rotacional.
Δr	Espacio recorrido.
F	Fuerza.

F_{roz}	Fuerza de rozamiento.
Fc	Fuerza de rozamiento cinético.
$F\vec{ext}$	Fuerza externa.
$\overrightarrow{F_t}$	Fuerza tangencial.
$\overrightarrow{I_F}$	Impulsión de fuerza.
m	Masa (propiedad del cuerpo).
dm	Masa infinitesimal.
M	Momento.
I	Momento de inercia.
L	Momentum angular.
$\overrightarrow{P}$	Momentum lineal.
$MVTO$	Movimiento.
$M.C.U.V$	Movimiento circular uniformemente variado.
$M.R.U.V.A.$	Movimiento rectilíneo uniformemente variado acelerado.
$M.R.U.V.R.$	Movimiento rectilíneo uniformemente variado retardado.
N	Normal (fuerza).
x	Posición.
θ	Posición angular.
S	Posición del elemento relativo.
P	Potencia.
P_m	Potencia media.
rad	Radian.
r	Radio.

v	Rapidez.
$\int$	Símbolo de integral.
$\sum$	Sumatoria.
T	Tensión (fuerza) (estática y dinámica).
t	Tiempo.
τ	Torque.
τ_{ext}	Torque externo.
W	Trabajo.
W_{NETO}	Trabajo neto.
ΔEC	Variación de energía cinética.
Δt	Variación de tiempo.
Δ	Variación finita.
d	Variación infinitesimal (derivada).
Δw	Variación de velocidad angular.

Prólogo

La mecánica clásica surgió como una disciplina fundamental para describir el movimiento de los cuerpos y las fuerzas que actúan sobre ellos. A través de observaciones y experimentos, se desarrollaron principios que explicaban fenómenos como el movimiento uniforme, la aceleración y la interacción gravitacional. Estas ideas fueron formalizadas en leyes que proporcionaron un marco matemático sólido para predecir y entender el comportamiento de objetos tanto en la Tierra como en el espacio. Este enfoque riguroso permitió grandes avances en astronomía, navegación y tecnología, convirtiéndose en la base de la física moderna hasta la llegada de teorías más avanzadas en la actualidad, temas que se detallan en las dos primeras obras de los autores.

En la ciencia se han desarrollado otras definiciones importantísimas dentro de la Mecánica clásica, que nos permiten ampliar el comportamiento de la materia en el mundo en el que vivimos, como son el trabajo, potencia, energía, cantidad de movimiento, impulso y torque; que se los aplica en los diversos movimientos de traslación, rotación, oscilatorios y ondulatorios.

El estudiante, al conocer, entender y practicar con propiedad estas definiciones, tendrá las alternativas de aplicarlas en el desarrollo de sistemas prácticos y comprenderá cómo los seres humanos lo hacen para crear modelos experimentales y prácticos para modificar su entorno.

La obra que se presenta a continuación forma parte de la serie de obras de mecánica clásica de los autores: en su primer libro se presentan contenidos teórico - prácticos de unidades y medidas; gráficas y funciones y magnitudes vectoriales [1]; seguidamente en su segundo libro se detallan contenidos teórico - prácticos de Cinemática, Estática y Dinámica [2]; hasta llegar a la presente obra con fundamentos teórico - prácticos de trabajo, potencia, energía e impulso y cantidad de movimiento lineal, con la presencia de una gran cantidad y variedad de problemas resueltos y propuestos de los temas escritos.

Invitamos a los lectores, particularmente a la juventud que orienta sus estudios en carreras de ciencias e ingenierías revisarlo íntegramente desde sus primeras páginas y en orden cronológico, con la finalidad de practicar en las misceláneas de ejercicios propuestos que se presentan ampliamente en esta obra.

Los Autores.

Introducción

Esta tercera obra de física abarca definiciones fundamentales que permiten a los estudiantes describir con mayor amplitud los fenómenos del movimiento dentro de la mecánica clásica. Se consideran magnitudes que combinan las causas (fuerzas) con los efectos (variaciones de posición o desplazamientos), tales como el trabajo, la rapidez con la que se lleva a cabo y las consecuentes variaciones en la energía del sistema.

Es así como, en el primer capítulo se aborda este tema trabajo, potencia y energía, presentándolo a nivel de fuerzas constantes y variables, para que se utilice en carreras de ciencias e ingenierías; para ello se han desarrollado ejercicios modelos que se puedan resolver con los métodos geométricos con derivadas e integrales y de conservación y no conservación de energía mecánica.

En el segundo capítulo se desarrollan ejercicios resueltos y propuestos de la primera unidad, con énfasis en magnitudes fundamentales de trabajo, potencia y energía.

En el tercer capítulo se estudia el impulso y cantidad de movimiento lineal de los cuerpos con aplicación práctica a la velocidad de un cuerpo, un apartado importante son las colisiones, en donde actúan únicamente fuerzas internas, de acción y reacción; la cantidad de movimiento se conserva para todas las clases de colisiones (elásticas e inelásticas) y si existe variación de cantidad de movimiento se relaciona únicamente a que actúan fuerzas externas.

La obra finaliza en su cuarto capítulo con una miscelánea de ejercicios resueltos y propuestos de impulso y cantidad de movimiento lineal. Esperamos con estas tres primeras obras contribuir con la búsqueda del conocimiento de los lectores y futuros profesionales en carreras de ciencias e ingenierías, y al mismo tiempo, les solicitamos hacernos llegar sus valiosas sugerencias.

Capítulo I

TRABAJO, POTENCIA y ENERGÍA

1.1. Trabajo

Se dice que se realiza un trabajo sobre un cuerpo de masa (m) cuando sobre este se aplica una fuerza $\left(\overrightarrow{F}\right)$ y este realiza un desplazamiento $\left(\overrightarrow{\Delta r}\right)$, véase Fig. 1.1.

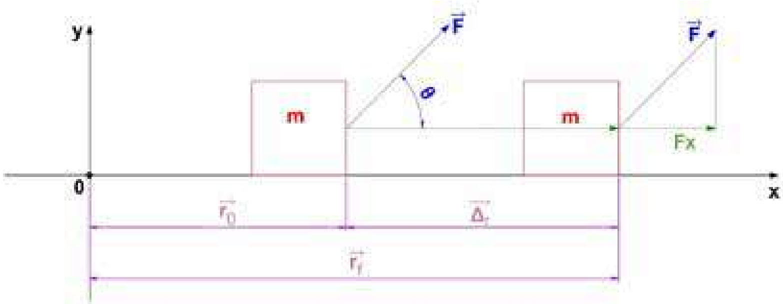


Figura 1.1. Definición de trabajo en la ciencia.

Nótese que la fuerza (F) y el desplazamiento (Δr) son vectores que tienen módulo, dirección y sentido, por lo que para que la fuerza realice trabajo, la dirección de la fuerza debe estar en la misma dirección del desplazamiento, y si la dirección de la fuerza no se encuentra en la dirección del desplazamiento entonces no se produce trabajo. Sin embargo, la fuerza tiene una componente en la dirección del desplazamiento $(Fx = F \cos \theta)$. Es esta componente la que realizará trabajo (W), luego el trabajo (W) se define como el producto punto o escalar entre el vector fuerza (F) y el vector desplazamiento (Δr):

$$W = F \cdot \Delta r = F \cdot \Delta r \, \cos \theta, \tag{1.1}$$

o como sabemos, el producto punto entre dos vectores nos da un "escalar" igual al módulo del primer vector (F) por el módulo del segundo vector (Δr) multiplicado por el coseno del ángulo agudo (θ) comprendido entre los vectores.

La unidad de medida del trabajo (W) en el SI es: **Newton-Metro** $(N.m)$ a esta unidad se le da el nombre de Julio (J), en el Sistema Técnico se mide en **Kilogramo fuerza - metro o Kilopondio - metro** $(kgf.m)$, y en el Sistema Inglés se mide en **Libra fuerza- Pie** $(lbf.pie)$.

Luego el valor del trabajo (W) dependerá del ángulo formado por los vectores F y Δr, así tendremos los siguientes casos:

1. Si $\theta = 0°$, $\cos(0°) = 1$ como (valor máximo +)
   El trabajo: $W = W_{\text{máx}}$ y positivo (+)
2. Si $\theta = 90°$, $\cos(90°) = 0$ como (valor máximo +)
   El trabajo: $W = 0$ (aunque se aplique fuerza y ocurra un desplazamiento, si los vectores son perpendiculares el trabajo será nulo)
3. Si $\theta = 180°$, $\cos(180°) = -1$ como (valor máximo -)
   El trabajo: $W = -W_{\text{máx}}$ (Valor máximo negativo)
4. Y cuando θ sea diferente a los valores indicados el trabajo será positivo o negativo de acuerdo con el valor del ángulo θ.

1.1.1. Fuerzas que efectúan trabajo nulo

Como hemos visto, que si la fuerza es perpendicular al desplazamiento $(\theta = 90°)$, el trabajo efectuado por la fuerza es cero. Por ejemplo, esto sucede en el caso de la fuerza centrípeta (Fc)

en el movimiento circular (Fig. 1.2 a) como la fuerza gravitacional que ejerce el sol sobre la tierra y que la mantiene a esta en órbita alrededor de aquel. O el de la fuerza de gravedad (mg), cuando un cuerpo se mueve en un plano horizontal (Fig. 1.2 b)

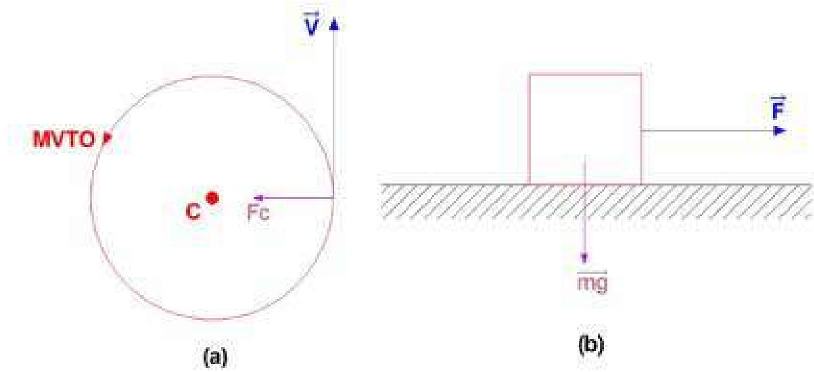


Figura 1.2. Fuerzas que efectúan trabajo nulo. a) Fuerza centrípeta en el movimiento circular. b) Fuerza gravitacional en el movimiento de cuerpo en un plano horizontal.

1.1.2. Trabajo realizado por una fuerza constante

Si la fuerza (F) que actúa para desplazar, a la masa (m), en la Fig. 1.1 es constante en modulo, dirección y sentido, el trabajo (w) será constante y tendrá un valor:

$$\begin{aligned} W &= F \cdot \Delta r \cdot \cos\,\theta \\ &= \Delta r \; F \; \cos\,\theta \\ &= \Delta r \cdot Fx \end{aligned}$$

En donde:

- W representa el trabajo realizado por la fuerza constante. (J = Julio)
- Δr representa distancia recorrida o modulo del desplazamiento (m)

- θ representa ángulo agudo entre la fuerza y el desplazamiento (Grados $^\circ$)
- $Fx = F\ \cos\theta$ representa componente de la fuerza constante en dirección de (N)

Al graficar la intensidad de la fuerza constante (F = constante), en función del módulo del desplazamiento, la gráfica seria como se indica en la Fig. 1.3. El área de esta gráfica (rectángulo) es (altura por base) o sea la fuerza en dirección del desplazamiento ($Fx = F\ \cos\theta$) por la distancia recorrida.

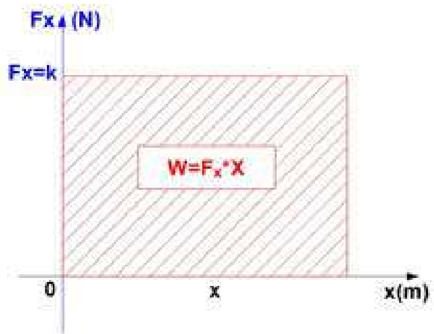


Figura 1.3. Área bajo la curva Fx vs x.

Luego, el área bajo esta curva representa el trabajo (W) realizado por la fuerza. En este caso como la fuerza es constante la gráfica Fx en función de x es una recta horizontal porque no depende de X y la gráfica corresponde a un rectángulo, cuya área es el trabajo. (W): W = Área de la curva Fx vs. X. (Ver Fig. 1.3).

Una consideración importante para un enfoque de sistema a los problemas es el trabajo, la cual es una transferencia de energía, si W es el trabajo realizado sobre un sistema y W es positivo, la energía se transfiere al sistema; si W es negativo, la energía se transfiere desde el Sistema. Por lo tanto, si un sistema interactúa con su entorno, esta interacción se describe como una transferencia de energía a través de las fronteras del sistema. El resultado es un cambio en la energía almacenada en el sistema.

Ejemplo 1. Trabajo de fuerzas constantes

La Fig. 1.4 representa el diagrama del cuerpo libre (d.c.l) de una partícula de masa "m" que esta interactuando con la tierra, con la superficie horizontal rugosa, con una fuerza externa, y la misma realiza un desplazamiento horizontal de modulo (x). Determinar el trabajo que realizan cada una de estas fuerzas constantes.

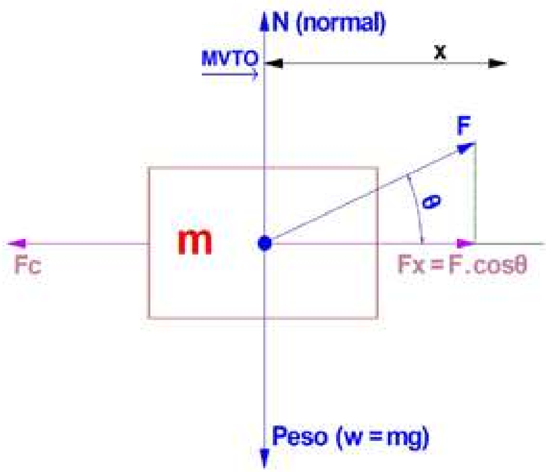


Figura 1.4. Definición del trabajo neto.

Solución: los trabajos de cada una de las fuerzas será:

1. De la Fuerza Externa $F : WF = Fx\ \cos\ \theta$ (Positivo)
2. Del Peso $(W) : Ww = wX \cos\ \ 270° = 0$ (cero)
3. De la Fuerza Normal $(N) : WN = N \cdot X \cos\ 90° = 0$ (cero)
4. De la Fuerza de Rozamiento $(F_C) = WF_C = F_C X \cos 180°$ (negativo)

Para obtener el trabajo total realizado sobre la masa por todas las fuerzas, debemos sumar los trabajos individuales, lo que se conoce como trabajo neto (W_{NETO}).

$$W_{NETO} = \sum_{i=1}^{n} Wi,$$

De donde se obtiene que

$$W_{NETO} = W_F + W_W + W_N + W_{F_C} \tag{1.2}$$

Otra forma de obtener el trabajo neto es determinar la fuerza resultante (calculando la resultante en la dirección del movimiento o desplazamiento) en este caso la resultante en X (FRx) y aplicar la fórmula (1.1).

$$\begin{aligned} W_{NETO} &= FRx \cdot X \cdot \cos 0^{\circ} \\ &= FRx \cdot x \end{aligned} \tag{1.3}$$

1.1.3. Trabajo realizado por una fuerza variable, caso unidimensional $F = f\,(x)$

Si el desplazamiento ocurre en una sola dimensión (Ejemplo: eje "x") y este ocurre bajo la acción de una fuerza que varía con la posición, la partícula se desplaza en la dirección de X creciente, desde $X = Xi$ (inicial) a $X = X_F$ (final). En esta situación, no se aplica la ecuación (1.1) $W = F \cdot \Delta r \cdot \cos\theta$. Ahora bien, si piensa que la partícula se somete a un desplazamiento muy pequeño, como se muestra en la Fig. 1.5 (a), la componente X de la fuerza Fx, es aproximadamente constante en este intervalo pequeño; para este desplazamiento pequeño, se puede aproximar el trabajo realizado por la fuerza como: $\Delta W \cong F_X \cdot \Delta X$, que corresponde con el área del rectángulo sombreado en la Fig. 1.5 (a).

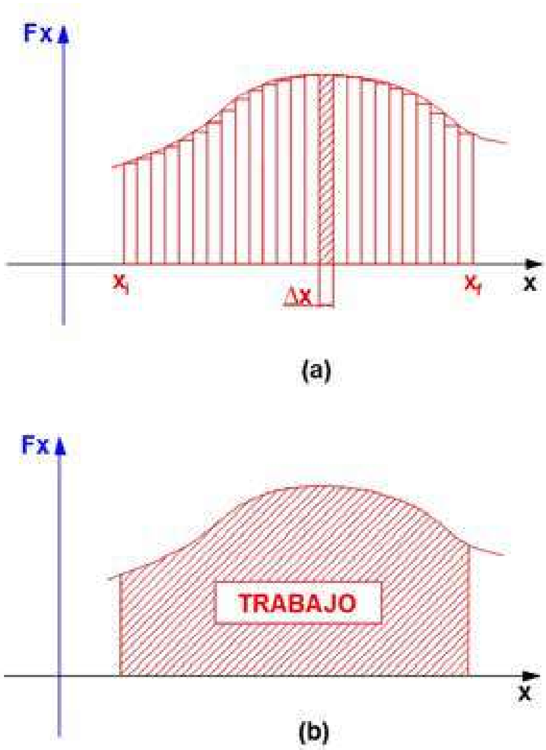


Figura 1.5. Definición del trabajo de fuerzas variables. a) Desplazamiento pequeño. b) Trabajo considerado en varios intervalos de tiempo.

Si consideramos F_X en función de la curva X dividida en un gran número de tales intervalos (ver Fig. 1.5 (b)), el trabajo total realizado durante el desplazamiento desde X_i hasta X_F es aproximadamente igual a la suma de un gran número de tales términos:

$$W = \sum_{X_i}^{X_F} F_X \cdot \Delta X \tag{1.4}$$

Si se permite que el tamaño de los desplazamientos pequeños se aproxime a cero, el número de términos en la suma aumenta sin límite, pero el valor de la suma se aproxima a un valor definido que es igual al área limitada por la curva X_F y el eje X.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{X_i}^{F_X} F_X \cdot \Delta X = \int_{X_i}^{X_F} F_X \cdot dx$$

En consecuencia, el trabajo realizado por X_F en la partícula conforme se traslada de X_i a X_F, se puede expresar así:

$$W = \int_{X_i}^{X_F} F_X \cdot d_X \tag{1.5}$$

Esta resultado se reduce a la ecuación 1.1 cuando la componente $F_X = F\cos\theta$ es constante.

1.1.4. Caso bidimensional

Si la fuerza está en un plano: $\overrightarrow{F} = F_X\overrightarrow{i} + F_y\overrightarrow{j}$ en donde F_x y F_y serían variables, el desplazamiento también ocurriría en el plano xy, es decir:

$$d\overrightarrow{r} = dx\overrightarrow{i} + dy\overrightarrow{j}$$

Luego el trabajo estará dado por:

$$\begin{aligned} W &= \int_{\overrightarrow{r}_o}^{\overrightarrow{r}_F} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} \\ &= \int_{r_o}^{r_F} \left(F_x\overrightarrow{i} + F_y\overrightarrow{j}\right) \cdot \left(dx\overrightarrow{i} + dy\overrightarrow{j}\right) \\ &= \int_{r_o}^{r_F} (F_x dx + F_y dy) \end{aligned}$$

Obteniendo así que,

$$W = \int_{r_o}^{r_F} (F_x dx + F_y dy) \tag{1.6}$$

1.1.5. Caso tridimensional

Si la fuerza está en el espacio: $\overrightarrow{F} = F_x\overrightarrow{i} + F_y\overrightarrow{j} + F_z\overrightarrow{k}$. Donde F_x , F_y y F_z pueden ser variables, el desplazamiento también ocurriría en el espacio:

$$d\overrightarrow{r} = dx\overrightarrow{i} + dy\overrightarrow{j} + dz\overrightarrow{k}$$

Luego el trabajo sería [3]:

$$\begin{aligned} W &= \int_{r_o}^{r_F} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} \\ &= \int_{r_o}^{r_F} \left(F_x\overrightarrow{i} + F_y\overrightarrow{j} + F_z\overrightarrow{k}\right) \cdot \left(dx\overrightarrow{i} + dy\overrightarrow{j} + dz\overrightarrow{k}\right) \\ &= \int_{r_o}^{r_F} (F_X d_X + F_y d_y + F_z d_z) \end{aligned} \tag{1.7}$$

1.2. Potencia (P)

Se define a la potencia como el ritmo o rapidez con el que se hace el trabajo conforme transcurre el tiempo (t).

1.2.1. Potencia media (Pm)

Es la potencia desarrollada por un agente externo y es igual al trabajo total que realiza dividido entre el intervalo de tiempo total transcurrido (Δt) es decir:

$$Pm = \frac{\Delta W}{\Delta t} \tag{1.8}$$

Esta potencia media es constante y se mide en el SI en Julio (J) /Segundo (S) [J/s = Vatio (W)] o también en kilovatio (kW), caballo de fuerza (HP), caballo de vapor (CV).

1 HP = 736 W

1 CV = 735 W

1.2.2. Potencia instantánea (P)

Aplicando límites a la ecuación (1.8) cuando t se aproxima a cero, se tiene que:

$$\begin{aligned} P &= \lim_{\Delta t \to 0} Pm \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} \\ &= \frac{dW}{dt} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$P = \frac{dW}{dt} \tag{1.9}$$

Cuando la potencia es constante en el tiempo:

$$Pm = \tfrac{W}{\Delta t}$$

Reemplazando la ecuación (1.1):

$$Pm = \tfrac{F \cdot \Delta r \cdot \cos\theta}{\Delta t}$$

Como: $v_m = \frac{\Delta t}{\Delta r}$ (velocidad) se encuentra:

$$Pm = F \cdot v_m \cdot \cos\theta \tag{1.10}$$

Y si F y v son variables, entonces:

$$Pm = Fv\cos\theta = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v} \tag{1.11}$$

De la ecuación (1.9) si conocemos la potencia instantánea en función del tiempo se obtiene [4]:

$$\int dW = \int P\left(t\right) \cdot dt$$

Por lo tanto,

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} P\left(t\right) \cdot dt \tag{1.12}$$

1.3. Energía

Se dice que un sistema tiene "energía" cuando tiene la capacidad de realizar un "trabajo". O en forma análoga cuando sobre un sistema se realiza un trabajo, sobre este, se transfiere energía.

Existen diferentes formas de energía como:

La solar, la lumínica, la eléctrica, la eólica, la hidráulica, la calorífica, etc. Así como existen formas de transformar una energía en otra.

En esta unidad vamos a considerar el estudio de la energía mecánica (EM), la misma que se presenta como: energía cinética (EC), energía potencial gravitatoria (EP_g) y energía potencial elástica (EP_e).

1.3.1. La energía cinética y el teorema del trabajo y la energía cinética

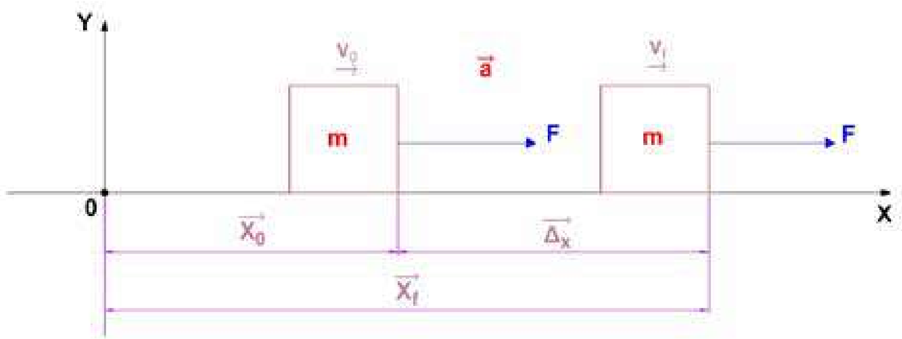


Figura 1.6. Relación entre el trabajo y la energía cinética.

Consideremos una masa m, inicialmente en la posición X_O, como se muestra en la Fig. 1.6, moviéndose hacia la derecha con una velocidad inicial v_O, supongamos que se aplica sobre la masa, una fuerza constante F hacia la derecha, el efecto de esta fuerza será de transferirle una aceleración constante a la cual provocara un aumento de la velocidad de la masa, de tal manera que en la posición X_F se moverá con una velocidad mayor de v_F. Como también la fuerza constante habrá realizado sobre la masa un trabajo (W) que será:

$$W = F \cdot \Delta x \cdot \cos 0^\circ = F \cdot \Delta x$$

Como la fuerza será el producto de la masa por la aceleración: $F = m \cdot a$, el módulo del desplazamiento (Δx) o distancia recorrida la podemos determinar del M.R.U.V.A., de la ecuación: $v_F^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$

$$\Delta x = \frac{v_F^2 - v_0^2}{2a}$$

Reemplazando en la fórmula del trabajo tenemos:

$$X = m \cdot a \left(\frac{v_F^2 - v_0^2}{2a}\right)$$

Luego,

$$W = \frac{1}{2} m\, v_F^2 - \frac{1}{2} m\, v_0^2$$

Este resultado nos dice que el trabajo realizado por la fuerza externa (F) sobre un cuerpo de masa m es igual a la diferencia entre los valores final e inicial de una cantidad $\frac{1}{2} m\, v^2$. Esta cantidad representa la energía asociada con el movimiento de la masa.
Esta cantidad es tan importante que se le ha dado un nombre especial: energía cinética (EC).

$$EC = \frac{1}{2} m\, v^2 \tag{1.13}$$

La energía cinética es una cantidad escalar y tiene las mismas unidades que el trabajo, o sea Julio (J).
Con esta definición, el trabajo (W) será:

$$W = EC_F - EC_0 = \Delta EC \tag{1.14}$$

Que representa la primera forma de relacionar el trabajo (W) con la Energía Cinética, exactamente con su variación (ΔEC), lo que nos indica de que, si sobre una masa se ejecuta trabajo, este servirá para variar la energía cinética (ΔEC) si únicamente ha variado la velocidad de la misma.

Ahora, ¿cuál sería el resultado, si la fuerza que actúa fuese variada?

En este caso se utilizaría la ecuación (1.5).

$$\begin{aligned} W &= \int_{X_0}^{X_F} F\,dx \\ &= \int_{X_0}^{X_F} m\,a\,dx \\ &= \int_{v_0}^{v_F} m\frac{vdv}{\cancel{dx}}\cancel{dx} \\ &= m\frac{1}{2}v^2\Big|_{v_0}^{v_F} \\ &= \frac{1}{2}mv_F^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \\ &= \Delta EC \end{aligned}$$

Que es el mismo resultado obtenido para el caso de fuerza constante, ecuación (1.14).

1.3.2. La energía potencial gravitatoria y el teorema del trabajo y la energía potencial gravitatoria

Consideremos un bloque de masa (m) en la posición (y_0) con respecto al sistema de referencia "O" como se indica en la Fig. 1.7, en esta condición sobre el bloque solo actuará el peso ($W = m\,g$) que es una fuerza hacia abajo, si queremos levantar al bloque se debe aplicar una fuerza externa hacia arriba (F) se puede levantar al bloque aceleradamente (si $F > W$) pero también se lo podría mover con velocidad constante (en este caso la aceleración será cero y el valor de la fuerza será igual al módulo del peso $W = m\,g$).
En tales condiciones el trabajo (W) realizado por esta fuerza (F) será:

$$
\begin{aligned}
W &= \overrightarrow{F} \cdot \Delta \overrightarrow{y} \\
&= F \Delta y \cos \theta
\end{aligned}
$$

En este caso $\theta = 0°$, por ende:

$$W = F \cdot \Delta y$$

Como el movimiento es uniforme (con velocidad constante); $ay = 0$

$$\overset{+}{\uparrow} \sum F_y = m\,a\,y$$

$$F - W = 0 \Rightarrow F = m \cdot g$$

Luego el trabajo será.

$$
\begin{aligned}
W &= m \cdot g \cdot \Delta y \\
&= m\,g\,(y_F - y_0)\,,
\end{aligned}
$$

por lo tanto,

$$W = m\,g\,y_F - m\,g\,y_0 \tag{1.15}$$

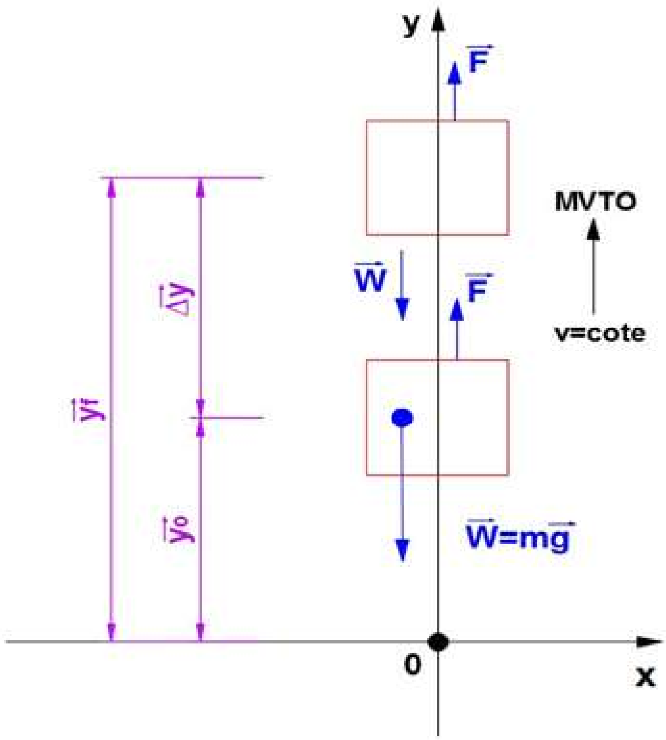


Figura 1.7. Relación entre el trabajo y la energía potencial y gravitacional.

El trabajo que realiza la fuerza externa es provocado al incrementar la altura "Y" sobre la masa "m", se define entonces, como la "Energía Potencial Gravitacional" (EP_g):

$$EP_g = m \cdot g \cdot y \tag{1.16}$$

Que de igual forma que el trabajo se mide usando unidades del SI, en este caso, en Julio (J). Al incrementar la altura "Y" la energía potencial gravitacional aumenta, es decir el trabajo realizado sirve para incrementar la energía potencial gravitacional del sistema masa - tierra.

Introduciendo la definición de la ecuación (1.16) en la ecuación (1.15) se obtiene:

$$
\begin{aligned}
W &= EP_{g(F)} - EP_{g(0)} \\
&= \Delta EP_g
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

Esta ecuación constituye también el teorema del trabajo con la energía potencial gravitacional, que dice: si una fuerza que se aplica, nos realiza un trabajo (W), que provoca únicamente variación de la altura (Y) respecto a la tierra, este trabajo nos da como resultado una variación (Δ) en la energía potencial gravitacional (EP_g).

1.3.3. Energía potencial elástica y el teorema del trabajo con esta energía

Fuerzas elásticas

Cuando se aplican fuerzas sobre cuerpos o masas, se provocan interacciones, que son de acuerdo con la tercera ley de Newton (fuerzas de acción y de reacción), así, si sobre el elemento o varilla de la Fig. (1.8) que está suspendida de un apoyo fijo, se aplica una fuerza externa (F) hacia abajo, la varilla reacciona y ejerce una fuerza en sentido contrario pero de igual módulo que la fuerza externa.

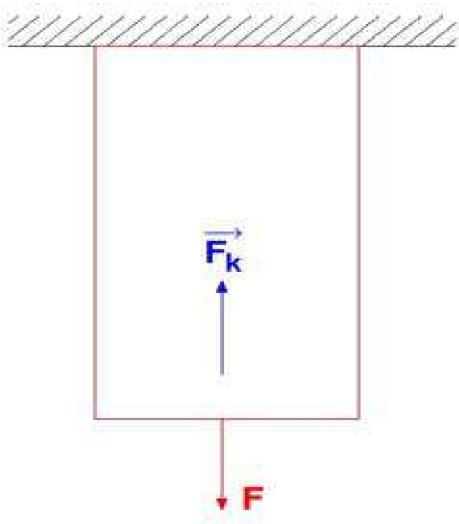


Figura 1.8. Definición de la ley de Hooke (Deformaciones infinitesimales).

Ahora, si el elemento no puede moverse, el efecto de estas fuerzas externas será el de provocar deformaciones longitudinales sobre el elemento (alargamientos o estrechamientos); estas deformaciones pueden ser elásticas (campo elástico). Esto ocurre cuando al retirar las fuerzas externas el elemento adquiere sus condiciones geométricas iniciales con sus respectivas propiedades mecánicas; pero si las deformaciones son plásticas (campo plástico) el material quedará deformado, y si las fuerzas son más intensas incluso llegará a romperse.

Estas deformaciones pueden ser microscópicas (ver Fig. 1.8) o macroscópicas como por ejemplo el caso del resorte helicoidal de la Fig. 1.9, en algunos casos, las deformaciones pueden observarse, e incluso ser medidas en centímetros o milímetros (X).

Si las fuerzas aplicadas permiten que el resorte se deforme dentro del campo elástico, se ha comprobado que estas fuerzas recuperadoras (F_K) son directamente proporcionales a las deformaciones (X) pero de sentidos contrarios, por ello, esta relación se expresa así:

$$F_K = -K\,X \tag{1.18}$$

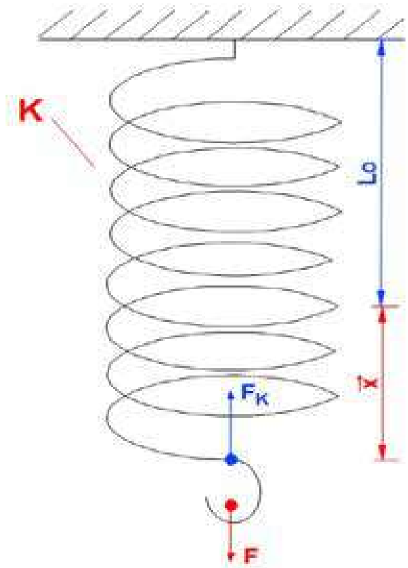


Figura 1.9. Ley de Hooke en resortes (Deformaciones finitas).

A esta relación se la conoce como **“LEY DE HOOKE”**, en donde:

- F_K representa la fuerza Elástica Recuperadora (Newton = N)
- X representa la deformación Longitudinal (Metros = m)
- K representa la constante Elástica (Newton por metro = $\mathrm{N/m}$)
- El módulo de esta fuerza será: $\left|\overrightarrow{F_K}\right| = KX$

Consideremos que tenemos un resorte de constante elástica K que se encuentre unido a una masa (m) que se encuentre sobre una superficie horizontal lisa y que se aplique una fuerza externa (F) hacia la derecha, también actuara la fuerza recuperadora (F_K), si al aplicar la fuerza se mueve el sistema desde la posición X_0 hasta la posición con velocidad constante, el trabajo realizado por esta fuerza variable ($F = F_K = K\ X$) porque depende de X, se lo determinara de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} W &= \int_{X_0}^{X_F} F dx \\ &= \int_{X_0}^{X_F} K\,X\,dx \\ &= K\frac{X^2}{2}\bigg|_{X_0}^{X_F} \\ &= \frac{1}{2}K\,X_F^2 - \frac{1}{2}K\,X_0^2. \end{aligned}$$

Obteniendo que

$$W = \frac{1}{2}K\,X_F^2 - \frac{1}{2}K\,X_0^2 \tag{1.19}$$

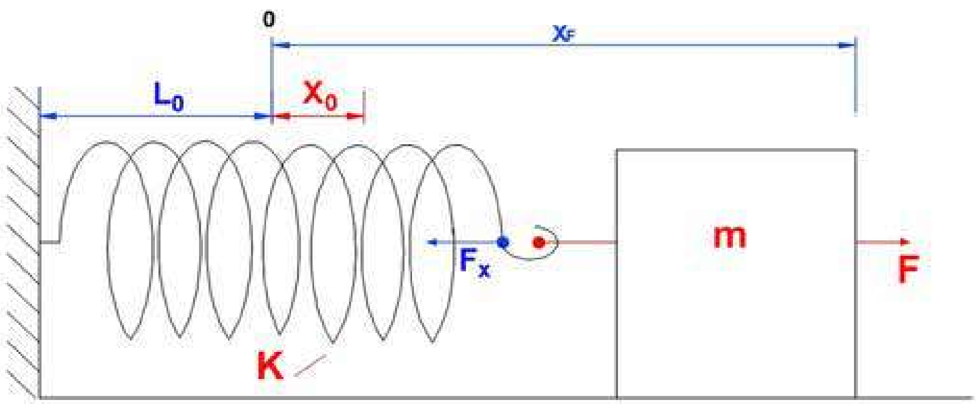


Figura 1.10. Relación entre trabajo y energía potencial elástica.

El valor de $\frac{1}{2}K\,X^2$ se le denomina energía potencial elástica (EP_E)

$$EP_E = \frac{1}{2}K\,X^2 \tag{1.20}$$

La misma que se mide en las mismas unidades de trabajo es decir (J).

Introduciendo el concepto de la ecuación. (1.20) en la ecuación (1.19).

$$\begin{aligned} W &= EP_{E(F)} - EP_{E(0)} \\ &= \Delta EP_E \end{aligned} \tag{1.21}$$

Nuevamente encontramos un resultado análogo, al aplicar a la fuerza elástica y esta ha realizado un trabajo desplazando o deformando a un resorte, el trabajo se ha invertido en la variación de la energía potencial elástica, que constituye el teorema del trabajo y la energía potencial elástica.

1.3.4. Teorema general del trabajo y energía

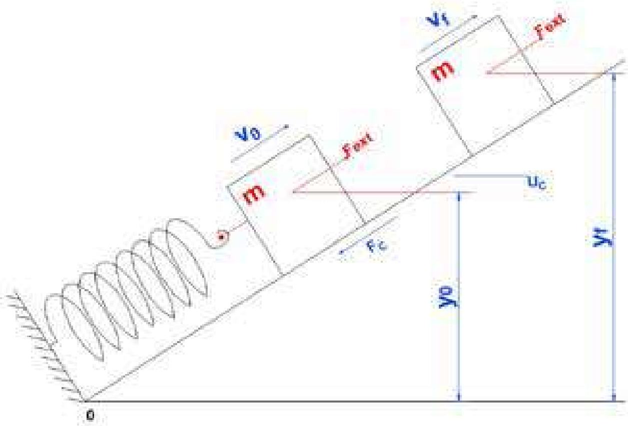


Figura 1.11. Definición del teorema general del trabajo y energía mecánica.

Si tenemos un sistema como el de la Fig. 1.11, en donde una masa m se encuentra comprimiendo un resorte en la posición "y_0" con una velocidad inicial v_0 y en estas condiciones se aplica una fuerza externa (Fext), la misma que realiza un trabajo positivo, el mismo que permite variar la altura de la masa así como vencer el trabajo realizado en contra de la fuerza de rozamiento (Fc), entonces la relación entre el trabajo y la energía es la siguiente:

$$W_{Fext} = \Delta EC + \Delta EP_g + \Delta EP_E + W_{Fc} \tag{1.22}$$

En donde:

- W_{Fext} representa el trabajo de la Fuerza Externa.
- $\Delta EC = EC_F - EC_0$ representa la variación de Energía Cinética.
- $\Delta EP_g = EP_{gF} - EP_{g0}$ representa la variación de Energía Potencial Gravitacional.
- $\Delta EP_E = EP_{EF} - EP_{E0}$ representa la variación de energía Potencial elástica.
- W_{Fc} representa el trabajo realizado por la Fuerza de Rozamiento en contra de MVTO.

$$F_C \cdot X_{0F} = \mu_C \cdot N \cdot X_{0F}$$

La ecuación 1.22 , la podemos expresar de la siguiente forma:

$$W_{Fext} - W_{Fc} = \Delta EC + \Delta EP_g + \Delta EP_E$$

En esta ecuación, en el miembro de la izquierda se expresa la suma algebraica de los trabajos, W_{Fext} (+) y W_{Fc} (-), esta suma es el trabajo total o trabajo neto: $W_{NETO} = W_{Fext} - W_{Fc}$.

$$W_{NETO} = \Delta EC + \Delta EP_g + \Delta EP_E \tag{1.23}$$

A partir de la ecuación (1.23) se pueden considerar los siguientes casos especiales:

PRIMER CASO: podríamos considerar que el trabajo $W_{NETO} = 0$ (cero)

Para esta situación la ecuación (1.23) queda:

$$0 = EC_F - EC_0 + EP_{gF} - EP_{g0} + EP_{EF} - EP_{E0} + EC_0 + EP_{g0} + EP_{E0}$$
$$= EC_F + EP_{gF} + EP_{EF}$$

Como ya se había definido, la energía mecánica (EM) como la suma de estas energías, o sea:

$$EM = EC_0 + EP_g + EP_E \tag{1.24}$$

Entonces el resultado para este caso será:

$$EM_0 = EM_F \tag{1.25}$$

A este resultado, para este caso se llama: conservación de la energía mecánica.

Esto ocurre cuando el trabajo es realizado sobre el sistema por fuerzas conservativas, para este caso de la Mecánica, las fuerzas conservativas son:

1. Fuerza gravitacional (peso) $W = mg$ en donde:
    - W representa el peso (N)
    - m repersenta la masa (kg)
    - g representa la aceleración de la Gravedad $(\mathrm{m/s^2})$
2. Fuerza elástica $(F_K = K \cdot X)$

SEGUNDO CASO: consideramos ahora que no existen fuerzas externas $(F_{Fext} = 0)$ pero si actúa la fricción o rozamiento. En estas condiciones la ecuación (1.23) queda de la siguiente manera:

$$0 = \Delta EC + \Delta EP_g + \Delta EP_E + W_{Froz}$$
$$0 = EC_F + EC_0 + EP_{gF} - EP_{g0} + EP_{EF} - EP_{E0} + W_{Froz}$$
$$EC_0 + EP_{g0} + EP_{E0} = EC_F + EP_{gF} + EP_{EF} + W_{Froz}$$

$$EM_0 = EM_F + W_{Froz} \tag{1.26}$$

En esta relación no se cumple la conservación de la Energía Mecánica, debido a que $EM_0 \neq EM_F$ en vista de que la $EM_0 > EM_F$, porque parte de la Energía Mecánica inicial se invierte en trabajo en contra de las fuerzas de rozamiento (W_{Froz}) trabajo que no representa Energía Mecánica y más bien debe convertirse en Energía Calorífica debido a la fricción entre las superficies que están en contacto físico, y como este calor ya no hay como recuperarlo en Energía Mecánica, se habrá perdido parte de la Energía Mecánica inicial (EM_0) y solo se obtendrá una energía mecánica final (EM_F) menor, por ello se considera que la eficiencia o rendimiento de la transformación (η) se define así:

$$\eta = \frac{EM_F}{EM_0} \times 100\,(\,\%) \tag{1.27}$$

Al multiplicarlo por cien se expresa el rendimiento en porcentaje $(\,\%)$.
En la ecuación (1.27) también se puede considerar en lugar de las energías, a las potencias:

$$\eta = \frac{P_F}{P_O} \times 100\,(\,\%) \tag{1.28}$$

Como también se pueden considerar transformaciones de Energía, que no necesariamente puede ser Mecánica, por ejemplo; en un motor se puede entregar inicialmente Energía Eléctrica (E_O) y transformarla en el motor en Energía Mecánica (E_F), en este caso el rendimiento sería:

$$\eta = \frac{E_F}{E_O} \times 100\,(\,\%) \tag{1.29}$$

La ecuación 1.26, se aplica en presencia de fuerzas conservativas y de fuerzas no conservativas, en este caso se considera como fuerza no conservativa a la fuerza de rozamiento $(Froz)$ y al trabajo realizado por esta fuerza (W_{Froz}) como un trabajo que se pierde como energía calorífica.

TERCER CASO: en el caso más general en donde actúen todos los efectos como en la Fig.1.11, se aplicará la ecuación general del teorema y la energía, ecuación (1.22). [5]

1.3.5. Correspondencia entre fuerzas conservativas y energía potencial

El trabajo realizado por fuerzas conservativas no depende de la trayectoria que se siga en el desplazamiento durante el movimiento, porque solo depende de la posición inicial y final.
Por ejemplo, cuando el resorte de la Fig. 1.12 , se desliza hacia la derecha.

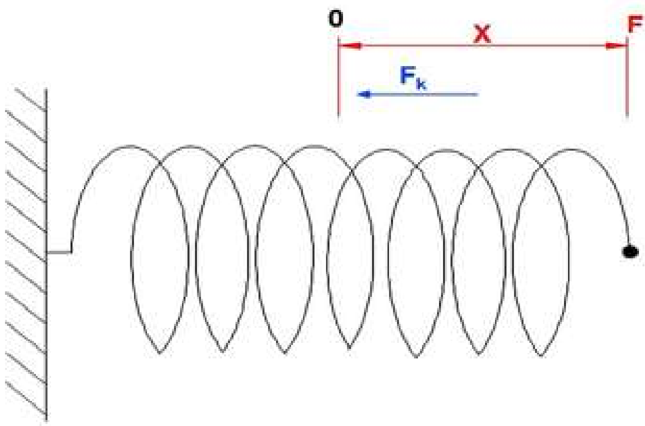


Figura 1.12. Definición de energía potencial provocada por fuerzas conservativas.

Desde la posición “0” (X_0) hasta la posición “F” (X_F). El trabajo realizado por la Fuerza Elástica es negativo, porque esta es hacia la izquierda y el desplazamiento es hacia la derecha, y este trabajo es igual a la variación de la energía potencial elástica (ΔEP_E), es decir:

$$W = -F_{(X)}\Delta X = \Delta EP_E \text{ o sea:}$$

$$F_{(X)} = \frac{\Delta EP}{\Delta X} \text{ y en el límite:}$$

$$F_{(X)} = \frac{-dEP}{dX} \tag{1.30}$$

Y si lo que se conoce es la función $F_{(X)}$ tendremos [6]:

$$\int dEP = \int -F_{(X)}dX$$

$$EP = -\int_{X_0}^{X_F} F_{(X)} dX \tag{1.31}$$

Capítulo II

EJERCICIOS PROPUESTOS Y RESUELTOS DE TRABAJO, POTENCIA Y ENERGÍA

2.1. Ejercicios resueltos

2.1.1. Trabajo y potencia

A continuación se presentará una serie de ejercicios referentes a Trabajo, Potencia y Energía, la notación $\rightarrow\ +$ junto a una sumatoria representa la dirección del movimineto que se considera positivo.

Ejercicio 2.1.1.1. *Un bloque de 10 kg es empujado 4 m a lo largo de una mesa horizontal, cuyo coeficiente de rozamiento cinético con la mesa es de 0,20 aplicando una fuerza constante de 160 N dirigida a 25° por arriba de la horizontal. Determinar:*

a. *El trabajo efectuado por cada una de las fuerzas que actúan sobre el bloque.*

b. *El trabajo neto.*

Datos:
$m = 10\ kg$

$\mathrm{x}_{OF} = 4\ m$

$\mu_c = 0,20$

$F = 160\ N$

$\theta = 25°$

Realizamos el d.c.l:

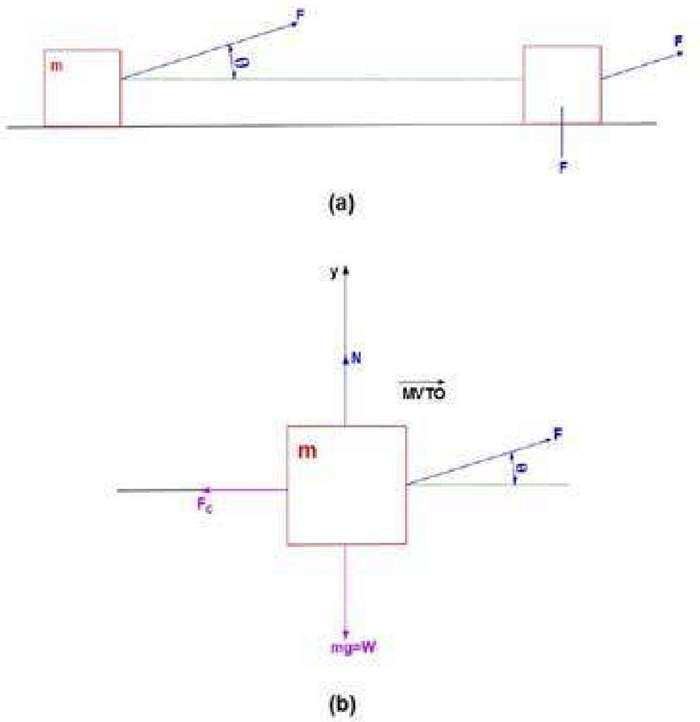


Figura 2.1. Movimiento de un bloque por una superficie. a) Desplazamiento del bloque. b) D.c.l. del bloque.

$$F_C = \mu_C \cdot \mathrm{N}$$

$$\overset{+}{\uparrow} \sum Fy = 0 \therefore \quad \mathrm{N} - \mathrm{mg}$$

$$F_C = \mu_C \cdot \mathrm{mg}$$

$$W_F = F \cdot x_{OF} \cdot \cos\theta = 160\,(4)\ \cos\ 25° = 580\,\mathrm{J}$$

$$W_N = N \cdot x_{OF} \cdot \cos\ 90° = 0\,\mathrm{J}$$

$$W_w = mg \cdot x_{OF} \cdot \cos\ 270° = 0\,\mathrm{J}$$

$$W_{Fc} = F_c \cdot x_{OF} \cdot \cos 180° = -F_c \cdot x_{OF} = -\mu_c \cdot mg \cdot x_{OF} = -78{,}4\,\mathrm{J}$$

Respuesta (a): el trabajo realizado por cada fuerza será:

$$W_F = 580\,J$$
$$W_N = 0\,J$$
$$W_w = 0\,J$$
$$W_{Fc} = -78,4\,J$$

Respuesta (b): El trabajo estará dado por la siguiente sumatoria:

$$\begin{aligned} W_{NETO} &= \sum W \\ &= 580\ J + 0\ J + 0\ J - 78{,}4\ J \\ &= 501,60\ J. \end{aligned}$$

Ejercicio 2.1.1.2. *Con una fuerza horizontal de 300 N se empuja una caja de 250 kg, 10 m, sobre una superficie horizontal rugosa, si la caja se mueve a velocidad constante. Determinar:*

a. El trabajo realizado por la fuerza de 300 N.

b. La energía cinética perdida debido a la fricción.

c. El coeficiente de fricción cinética.

Datos:
$F = 300\ N$

$m = 250\,kg$

$x_{OF} = 10\,m$

$\overrightarrow{MVTO}$ (v = cote)

$\theta = 0°$

Realizamos el d.c.l:

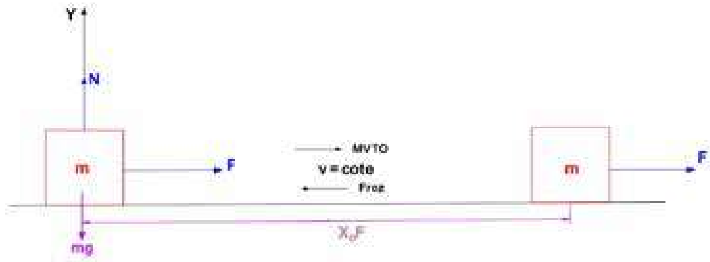


Figura 2.2. Movimiento de una caja sobre una superficie rugosa.

$$\begin{aligned} W_F &= F \cdot x_{OF} \cdot \cos(0°) \\ &= 300\,(25)\cos(0°) \\ &= 7\ 500\ N \end{aligned}$$

$W_F = \cancel{\Delta EC} + W_{Froz}$

$W_{Froz} = -W_F = -7\,500\,\mathrm{J} \Rightarrow$

$\overset{\to +}{\sum} Fx = 0 \therefore F - Froz = 0 \Rightarrow Froz = 300\,\mathrm{N} \Rightarrow \text{Hacia la izquierda}$

El trabajo realizado contra las fuerzas de rozamiento es la energía cinética que se pierde debido a la fricción

$EC = -7\,500\,\mathrm{J}$ Resp.b

$\overset{+}{\uparrow} \sum Fy = 0$

$N - mg = 0 \Rightarrow N = mg$

$\mathrm{W}_{FROZ} = \mu_C \cdot N \cdot x_{OF}$

$\mathrm{W}_{FROZ} = \mu_C \cdot mg \cdot x_{OF} \Rightarrow \mu_C = \frac{\mathrm{W}_{FROZ}}{m \cdot g \cdot x_{OF}} \Rightarrow$

$\mu_C = \frac{7\,500}{250(9{,}8)(10)}$

$\mu_C = 0,306 \Rightarrow$ Resp.c

Ejercicio 2.1.1.3. *Una fuerza:* $\overrightarrow{F} = \left(5x\,\overrightarrow{i} - 8y\,\overrightarrow{j}\right)$ N, *actúa sobre una partícula, de modo que cuando el objeto se mueve en la dirección del plano (x,y), desde el origen (0,0) hasta (6,-4) m. Encuentre el trabajo efectuado por la fuerza, sobre el objeto.*

Datos:

$\overrightarrow{F} = \left(5x\,\overrightarrow{i} - 8y\,\overrightarrow{j}\right)\ N$

$\overrightarrow{r_o} = (0,0)$

$\overrightarrow{r_F} = (6,-4)\ m$

$W_{o \to F} = ?$

$$\begin{aligned}
W_{OF} &= \int_{ro}^{rF} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} \\
&= \int_{ro}^{rF} \left(5x\overrightarrow{i} - 8y\overrightarrow{j}\right)\left(dx\overrightarrow{i} + dy\overrightarrow{j}\right) \\
&= \int_{0}^{6} 5x\ dx - \int_{0}^{-4} 8y\ dy \\
&= \left.\frac{5x^2}{2}\right|_0^6 - \left.\frac{8y^2}{2}\right|_0^{-4} \\
&= \frac{5(6)^2}{2} - \frac{8(-4)^2}{2} \\
&= 90 - 64 \\
&= 26\ J
\end{aligned}$$

Ejercicio 2.1.1.4. *Una partícula que se somete a una fuerza Fx que varía con la posición (x), como se ve en la figura adjunta, determine el trabajo realizado por la fuerza sobre el cuerpo cuando este se mueve:*

1. *De x = 0 m a x = 5 m*
2. *De x = 5 m a x = 10 m*
3. *De x = 10 m a x = 15 m*
4. *De x = 15 m a x = 18 m*
5. *De x = 18 m a x = 25 m*

¿Cuál es el trabajo total realizado por la fuerza a lo largo de la distancia: $x = 0m$ *a* $x = 25m$*?*

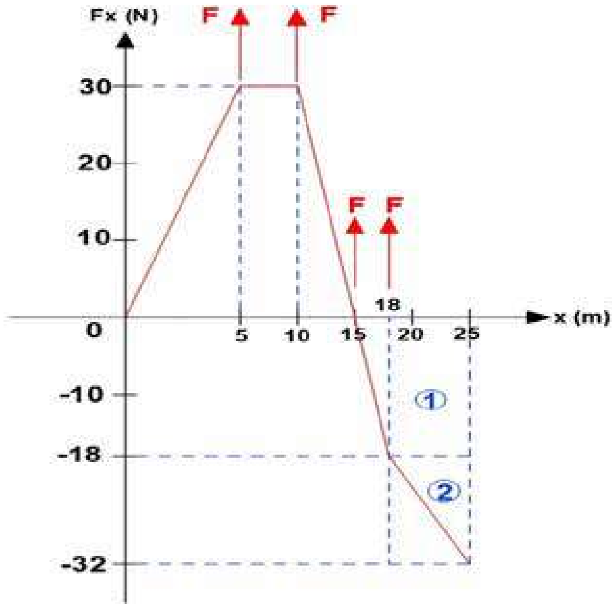


Figura 2.3. Movimiento de una partícula por una fuerza Fx.

Solución: (se plantean dos formas para resolver el problema).

Primera forma: por el cálculo de áreas, el área bajo la gráfica Fx vs x es el trabajo realizado.

1. De $x = 0m$ a $x = 5m$ se tiene que $W_{0-5} = \frac{1}{2}(5m)(30N) = 75J$
2. De $x = 5m$ a $x = 10m$ se tiene que $W_{5-10} = 5\,m\,(30\,N) = 150J$
3. De $x = 10m$ a $x = 15m$, se tiene que $W_{10-15} = \frac{1}{2}(5)(30) = 75J$
4. De $x = 15m$ a $x = 18m$, se tiene que $W_{15-18} = \frac{1}{2}(3)(-18) = -27J$
5. De $x = 18m$ a $x = 25m$ se tiene que $W_{18-25} = A_1{+}A_2 = 7(-18){+}\frac{1}{2}(7)(-14) = -175J$

Por lo que:

$$
\begin{aligned}
W_{\text{TOTAL}} &= \sum W \\
&= 75J + 150J + 75J - 27J - 175J \\
&= 98J
\end{aligned}
$$

Segunda forma: por medio de cálculo integral.

1. De $x = 0m$ a $x = 5m$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
W_{0-5} &= \int_0^5 6x \; dx \\
&= 75J
\end{aligned}
$$

2. De $x = 5m$ a $x = 10m$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
W_{5-10} &= \int_5^{10} 30 \; dx \\
&= 150J
\end{aligned}
$$

3. De $x = 10m$ a $x = 15m$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
W_{10-15} &= \int_{10}^{15} -6x + 90 \; dx \\
&= 75J
\end{aligned}
$$

4. De $x = 15m$ a $x = 18m$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
W_{15-18} &= \int_{15}^{18} -6x + 90 \; dx \\
&= -27J
\end{aligned}
$$

5. De $x = 18m$ a $x = 25m$ se tiene que

$$\begin{aligned} W_{18-25} &= \int_{18}^{25} -2x + 18 \, dx \\ &= -175J \end{aligned}$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} W_{\text{TOTAL}} &= \sum W \\ &= 75J + 150J + 75J - 27J - 175J \\ &= 98J \end{aligned}$$

Como se observa se obtienen las mismas respuestas por los dos formas desarrolladas.

Ejercicio 2.1.1.5. *Una bala de 25 gramos se acelera en el cañón de un rifle de 80 cm de largo hasta una velocidad de 680 m/s. Utilizando el teorema del trabajo y la energía encuentre la fuerza ejercida sobre la bala mientras se acelera.*

Datos:

$m = 25 \ g = 0,025 \ kg$

$v_F = 680 \ m/s$

$F = ?$

$v_0 = 0 \ m/s$

Utilizamos el teorema del trabajo y la energía:

$$\begin{aligned} W_F &= \Delta EC \\ &= EC_F - \cancel{EC_O}, \end{aligned}$$

de donde se tiene que $F \cdot d = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_F^2$, al despejar F, se tiene que:

$$\begin{aligned} F &= \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_F^2}{d} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(0,025)(680)^2}{0,80} \\ &= 7\,225 \, N \end{aligned}$$

Ejercicio 2.1.1.6. *Una bala con una masa de 10 gramos y una velocidad de 700 m/s penetra en un árbol hasta una distancia de 6 cm. Determinar:*

a. *La fuerza de rozamiento media que detiene a la bala (considere el teorema del trabajo y la energía).*

b. *Suponiendo una fuerza de rozamiento constante, determine el tiempo necesario para detener la bala.*

Datos:

$m = 0,01\,\mathrm{kg}$

$v_0 = 700\,\mathrm{m/s}$

$x_{OF} = 0,06\,\mathrm{m}$

$a)\,Froz = ?$

$b)\,t_{OF} = ?$

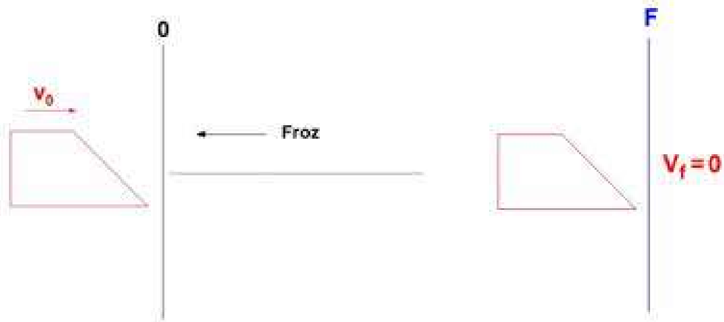


Figura 2.4. Movimiento de una bala al atravesar un árbol.

Respuesta (a): Utilizando el teorema del trabajo y la energía se puede escribir el trabajo como $W_F = \Delta EC + W_{Froz}$, nótese que $W_F = 0$, por lo tanto al despejar W_{Froz} se tiene:

$$W_{Froz} = -\Delta EC$$

$$\Rightarrow \qquad Froz \cdot d = -(EC_F - \cancel{EC_O}),$$

al despejar $Froz$, obtenemos lo deseado:

$$\begin{aligned} Froz &= -\frac{EC_F}{d} \\ &= -\frac{\frac{1}{2}mv_F^2}{d} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\cdot 0{,}01\cdot 700}{0{,}06} \\ &= 40\ 833,3\ N. \end{aligned}$$

Respuesta (b): Nótese que el t_{OF} se encuentra en M.R.U.V.R, por lo que $\cancel{v_F^2} = v_0^2 - 2a\cdot x_{OF}$, al despejar la aceración se tiene que:

$$\begin{aligned} a &= \frac{v_0^2}{2\cdot x_{OF}} \\ &= \frac{700^2}{2\cdot 0{,}06} \\ &= 4\ 083\ 333,3\ m/s^2. \end{aligned}$$

Por otro lado, se sabe que $\cancel{v_F} = v_0 - a\cdot t_{OF}$ y al despejar t_{OF} obtenemos lo deseado:

$$\begin{aligned} t_{OF} &= \frac{v_0}{a} \\ &= \frac{700}{4\ 083\ 333,3} \\ &= 1,71\times 10^{-4}\ s \end{aligned}$$

Ejercicio 2.1.1.7. *¿Qué trabajo es realizado por una fuerza* $\overrightarrow{F} = \left(8x^2\overrightarrow{i} - 12\overrightarrow{j}\right)\ N$*?, en donde x (m), que mueve una partícula desde una posición* $\overrightarrow{r_0} = \left(5\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}\right)$ m*, hasta una posición* $\overrightarrow{r_F} = \left(-6\overrightarrow{i} + 8\overrightarrow{j}\right)\ m$

Datos:
$\overrightarrow{F} = \left(8x\overrightarrow{i} + 12\overrightarrow{j}\right)$ N

$\overrightarrow{r}_O = (5,\ -3)\,m$

$\overrightarrow{r}_F = (-6,\ 8)\,m$

$W_{OF} =?$

Así se tiene que,

$$
\begin{aligned}
W_{O-F} &= \int_{r_0}^{r_F} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} \\
&= \int_{(5,3)}^{(6,8)} \left(8x^2\overrightarrow{i} + 12\overrightarrow{j}\right) \cdot \left(dx\overrightarrow{i} + dy\overrightarrow{j}\right) \\
&= \int_{5}^{-6} 8x^2 dx + \int_{-3}^{8} 12dy \\
&= \left.\frac{8x^3}{3}\right|_{5}^{-6} + 12y|_{-3}^{8} \Rightarrow \\
&= \frac{8(-6)^3}{3} - \frac{8(-5)^3}{3} + [12\,(8) - 12\,(-3)] \\
&= -576 - 333,33 + 132 \\
&= -777,33\ J
\end{aligned}
$$

Ejercicio 2.1.1.8. *Una partícula de 8 kg se mueve a lo largo del eje x. su posición varia con el tiempo de acuerdo con:* $x = 3 - 2t + 4t^3$*, donde t (segundos), y x (metros). Determinar:*

a. La energía cinética en cualquier tiempo t*.*

b. La aceleración de la partícula y la fuerza que actúa sobre ella en el tiempo t.

c. La potencia que se entrega a la partícula en el tiempo t.

d. El trabajo efectuado sobre la partícula en el intervalo t = 0 hasta t = 4 segundos.

Respuesta (a): La energía cinética estará dada por $EC = \frac{1}{2}mv^2$, se sabe que $x = 3-2t+4t^3$, así la velocidad estará dada por la primera derivada de la posición respecto al tiempo:

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{dx}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}(3 - 2t + 4t^3) \\
&= -2 + 12t^2
\end{aligned}
$$

Al reemplazar la ecuación de la velocidad en la ecuación de la energía cinética se tiene:

$$\begin{aligned} EC &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}m(-2+12t^2)^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 8\cdot(-2+12t^2)^2 \\ &= 4(4-48t^2+144t^4) \\ &= 576t^4-192t^2+16. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación de la energía cinética en cualquier tiempo t estará dada por $EC = 576t^4 - 192t^2 + 16$.

Respuesta (b): La aceleración de la partícula en un tiempo t estará dada por la derivada de la velocidad respecto al tiempo como sigue:

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}(-2+12t^2) \\ &= 24\, t \end{aligned}$$

Por otro lado, la fuerza está dada por:

$$\begin{aligned} F &= m\cdot a \\ &= 8\cdot 24\, t \\ &= 192\, t \end{aligned}$$

Respuesta (c): La potencia está dada por:

$$\begin{aligned} P &= F\cdot v \\ &= 192t\cdot(-2+12t^2) \\ &= 2\,304\, t^3 - 384\, t \end{aligned}$$

Respuesta (d): Por último, el trabajo efectuado sobre la partícula en el intervalo $t = 0$ hasta

$t = 4$ segundos, esta dado por:

$$W = \int_0^4 2\,304\ t^3 - 384\ t\ \mathrm{d}t$$
$$= 576\ t^4 - 192\ t^2 \Big|_0^4$$
$$= 144\ 384\ J$$

Ejercicio 2.1.1.9. *Un motor hala una caja de 500 kg por una superficie plana, si el coeficiente de fricción entre la caja y la superficie es 0,45. Determinar:*

a. La potencia que debe entregar el motor para mover la caja a una velocidad constante de 6 m/s.

b. Cuanto trabajo efectúa el motor en 3 minutos.

Datos:

$m = 500\ kg$

$\mu_c = 0{,}45$

$a)\ P_M = ?$

$v = \text{constante} = 6\ \text{m/s}$

$b)\ W_{3\text{min}} = ?$

Realizamos el d.c.l:

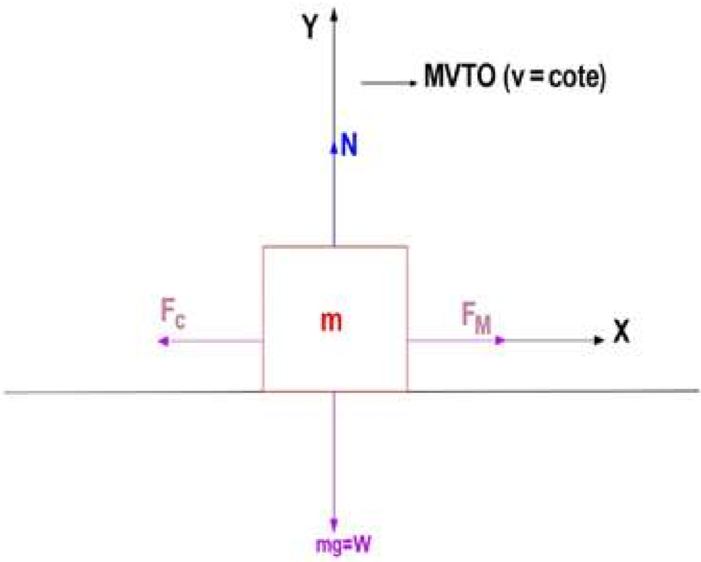


Figura 2.5. Movimiento de una caja en un plano.

Respuesta (a):

$$P_M = \overrightarrow{F_M} \cdot \overrightarrow{v} \cdot \cos\theta = F_M\, v\, \cos 0^\circ \ \text{(Ec,1)}$$

$$\overset{\rightarrow + MVTO}{\sum F_x} = m \cdot ax \therefore \begin{cases} F_M - F_C = m \cdot ax \\ a_x = 0 \Rightarrow v = \text{constante} \end{cases}$$

$$F_M = F_C \ [2] \qquad\qquad F_C = \mu_C \cdot N \ [3]$$

$$\overset{+}{\uparrow} \sum F_y = 0 \therefore N - mg = 0 \Rightarrow N = mg \text{ en } [3]$$

$$F_C = \mu_C \cdot mg = 0,45\,(500)\,(9,8) \Rightarrow F_C = 2\,205\,N = F_M$$

$$\text{En (Ec,1)} \ \ P_M = 2\,205(6) \Rightarrow P_M = 13\,230\,w \Rightarrow \text{Resp (a)}$$

Respuesta (b):

$$\begin{aligned} W_M &= P_M \cdot t \\ &= 13\,230\,(180) \\ &= 2\,381\,400\,J \end{aligned}$$

Ejercicio 2.1.1.10. *Un auto de 1 500 kg acelera uniformemente desde el reposo hasta 15 m/s en 6 segundos. Determinar:*

a. *El trabajo efectuado sobre el auto en ese tiempo.*

b. *La potencia media entregada por el motor en los primeros 6 segundos.*

c. *La potencia instantánea entregada por el motor en $t = 4s$.*

Datos:

$m = 1\,500\,\mathrm{kg}$

$v_0 = 0$

$v_F = 15\,\mathrm{m/s}$

$t_{OF} = 6\,\mathrm{s}$

$a)\, W_{O-F} = ?$

$b)\, P_{media} = ?$

$c)\, P_4 =?$

$t = 4\mathrm{s}$

1. $W_{OF} = F \cdot x_{OF} \cdot \cos 0° = F \cdot x_{OF}$ (Ec,1)

   $F = m \cdot a$ [3] : $OF : M.R.U.V.A$: $v_F = \cancel{v_0} + a \cdot t_{OF} \Rightarrow$

   $a = \frac{v_F}{t_{OF}} = \frac{15}{6} \Rightarrow a = 2,5\,\mathrm{m/s^2}$ en (Ec,2)

   $F = (1\,500)\,(2,5) \Rightarrow F = 3\,750\,N$

   $x_{OF} = \cancel{v_0} \cdot t_{OF} + \frac{1}{2}\,a\,{t_{OF}}^2 = \frac{1}{2}\,(2,5)\,(6)^2$

   $x_{OF} = 45\,\mathrm{m} \Rightarrow$ en (Ec,1)

   $W_{OF} = 3\,750\,(45) \Rightarrow W_{OF} = 168\,750\,\mathrm{J} \Rightarrow$ Resp (a)

2. $P_{media} = \frac{W_{O-F}}{t_{OF}} = \frac{168\,750}{6} \Rightarrow P_{media} = 28\,125\,w \Rightarrow$ Resp (b)

3. $P_4 = F \cdot v_4$ (Ec,3) $\therefore v_F = v_0 + a\ t_4 = 0 + 2,5\,(4) = 10\,\text{m/s}$ en (Ec,4)

   $P_4 = 3\ 750\,(10) \Rightarrow P_4 = 3\ 750\ w \Rightarrow$ Resp (c)

Ejercicio 2.1.1.11. *Un bloque de* $16\ kg$ *se mueve sobre una superficie horizontal rugosa y choca con un resorte, como se puede ver en la figura adjunta, la velocidad del bloque justo antes del choque es de 8* m/s*. Conforme el bloque después de detenerse momentáneamente, rebota hacia la izquierda con el resorte descomprimido, su velocidad cuando se separa del resorte es de 6* m/s*. Si el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es de 0,35. Determinar:*

a. La energía perdida debido a la fricción mientras el bloque está en contacto con el resorte.

b. La distancia máxima que se comprime el resorte.

c. La distancia que avanza el bloque después de separarse del resorte hasta detenerse.

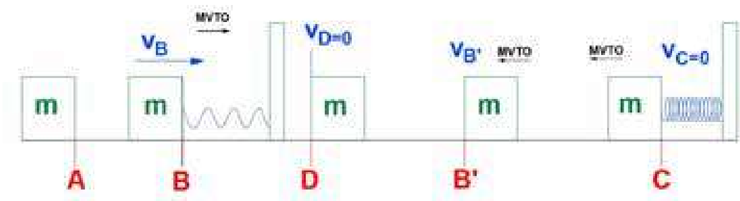


Figura 2.6. Movimiento de un bloque al impactar con un resorte.

Solución:

Datos:

$m = 16\,\text{kg}$

$\overrightarrow{v_B} = \left(8\,\overrightarrow{i}\right)\,\text{m/s}$

$\overrightarrow{v_{B'}} = \left(-6\,\overrightarrow{i}\right)\,\text{m/s}$

$\mu_c = 0,35$

$a)\ E_{FRICCION\ B\ B'} = ?$

$b)\ X_{BC} = ?$

$c)\ X_{B'D} = ?$

Respuesta (a): Se sabe que $E_{FRICCION\ BB'} = W_{Froz\,BC} + W_{Froz\,CB'}$ $(\text{Ec},1)$ si aplicamos el teorema del trabajo y la energía entre $\overset{MVTO}{\overrightarrow{B}}$ y $\overset{MVTO}{\overrightarrow{B}}$ se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
EMB &= EMB' + W_{Froz\,BC} + W_{Froz\,CB'} \\
\frac{1}{2} m\, v\, B^2 &= \frac{1}{2} m\, v\, B'^2 + E_{FRICCION\,BB'}
\end{aligned}
$$

de donde

$$
\begin{aligned}
E_{FRICCION\,BB'} &= \frac{1}{2}\ m\ \left(v\,B^2 - v\,B'^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\,(16)\,\left(8^2 - 6^2\right) \\
&= 224\,J
\end{aligned}
$$

Respuesta (b):

$$
\begin{aligned}
W_{Froz\,BC} + W_{Froz\,CB'} &= Fc \cdot X_{BC} + Fc \cdot X_{CB} \\
2\,Fc\,X_{BC} &= 224J
\end{aligned}
$$

de dónde

$$
\begin{aligned}
X_{BC} &= \frac{224}{2\,\mu_C \cdot mg} \\
&= \frac{224}{2\,(0,35)\,(16)\,(9,8)} \\
&= 2,04\,m
\end{aligned}
$$

Respuesta (c):

$$
\begin{aligned}
EMB' = \cancel{EMD} + W_{FrozB'D} \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m} v_{B'}{}^2 \\
= \mu_C \cdot \cancel{mg} \cdot X_{B'D}
\end{aligned}
$$

de donde

$$
\begin{aligned}
X_{B'D} &= \frac{\frac{1}{2}(6)^2}{0,35\,(9,8)} \\
&= 5,2\,m
\end{aligned}
$$

Ejercicio 2.1.1.12. *Un bloque de 10 kg se pone en MVTO ascendente en un plano inclinado a una velocidad inicial de 18 m/s (ver figura); El bloque se detiene después de recorrer 6 m a lo largo del plano el cual está inclinado un ángulo de 30° con la horizontal. Determinar:*

a. El cambio de energía cinética del bloque.

b. El cambio de energía potencial.

c. La fuerza de fricción ejercida sobre el bloque.

d. El coeficiente de fricción cinética.

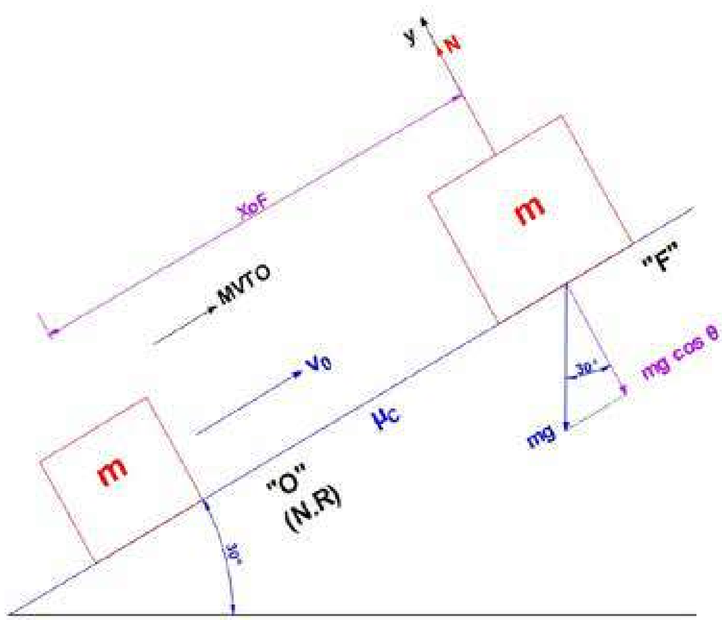


Figura 2.7. Movimiento de un bloque en un plano inclinado.

Datos:

$m = 10\,\mathrm{kg}$

$v_0 = 18\,\mathrm{m/s}$

$v_F = 0\,\mathrm{m/s}$

$x_{OF} = 6\,\mathrm{m}$

$\theta = 30°$

$a)\ \Delta EC = ?$

$b)\ \Delta EPg = ?$

$c)\ Fc = ?$

$d)\ \mu_C = ?$

Respuesta (a): El cambio de energía cinética del bloque está dada por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}\Delta EC &= EC_F - EC_0\\ &= \frac{1}{2}mv_F^2 - \frac{1}{2}mv_0^2\\ &= \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 0 - \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 18^2\\ &= -1\ 620\ J.\end{aligned}$$

Respuesta (b): El cambio de energía potencial está dado por:

$$\begin{aligned}\Delta EPg &= EPg_f - EPg_0\\ &= m\cdot g\cdot YoF\\ &= 10\cdot 9{,}81\cdot 3\\ &= 294\ J.\end{aligned}$$

Notése que YoF está dado por $YoF = XoF\cdot \mathrm{sen}(\theta) = 6\cdot \mathrm{sen}(30°) = 3m$

Respuesta (c): La fuerza de fricción ejercida sobre el bloque está dada por:

$$\begin{aligned} EM_0 &= EM_F + W_{Froz} \cdot OF \\ \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 &= m \cdot g \cdot YoF + Fc \cdot XoF \\ \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 18^2 &= 10 \cdot 9{,}8 \cdot 3 + Fc \cdot 6, \end{aligned}$$

de dónde, despejando Fc, se obtiene que:

$$Fc = 221\ N$$

Respuesta (d): Por último, el coeficiente de fricción cinética está dada por $Fc = \mu_c \cdot N$, despejando μ_c se tiene que:

$$\begin{aligned} \mu_c &= \frac{Fc}{N} \\ &= \frac{221}{10 \cdot 9{,}8 \cdot \cos(30°)} \\ &\approx 2{,}60 \end{aligned}$$

Ejercicio 2.1.1.13. *Una niña se desliza sin fricción desde una altura $h = 3,5m$ por la resbaladilla curva de una alberca, (ver figura); la niña se lanza al agua desde una altura de $h = 0,7\ m$ y el ángulo que forma el pie de la resbaladilla con la horizontal es de 35° (θ_0). Determinar:*

a. *La velocidad en B (v_0).*

b. *La altura máxima respecto al agua.*

c. *La velocidad con la que llega el agua, (módulo o rapidez).*

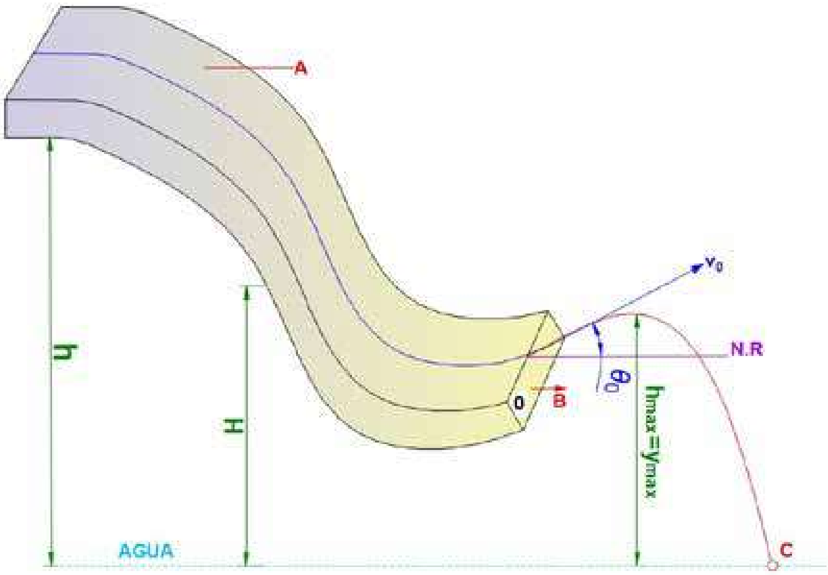


Figura 2.8. Deslizamiento en una resbaladera.

Datos:

$y_{AO} = 3,5 - 0,7 = 2,8\,\mathrm{m}$

$\theta_0 = 35°$

$a)\ v_0 = ?$

$b)\ y_{\text{máx}} = ?$

$c)\ v_C = ?$

Respuesta (a): Aplicamos el teorema entre A y O:

$$EM_A = EM_0$$

$$EC_A + EP_{g[A]} = EC_0 + EP_{g[0]}$$

$$m \cdot g \cdot y_{AO} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2,$$

despejando v_0, se tiene lo deseado:

$$
\begin{aligned}
v_0 &= \sqrt{2 \cdot g \cdot y_{AO}} \\
&= \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 2,8} \\
&= 7{,}41\ m/s.
\end{aligned}
$$

Respuesta (b): la altura máxima respecto al agua estará dada por:

$$y_{max} = H + h_{max},$$

de dónde h_{max} está dada por:

$$
\begin{aligned}
h_{max} &= \frac{v_0^2\ \operatorname{sen}^2(\theta_0)}{2g} \\
&= \frac{7,4^2\ \operatorname{sen}(35^\circ)}{2 \cdot 9,81} \\
&= 0{,}92\ m
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, y_{max} será:

$$
\begin{aligned}
y_{max} &= 0{,}70 + 0{,}92 \\
&= 1,62\ m
\end{aligned}
$$

Respuesta (c): Para hallar la velocidad con la que llega el agua, nótese que $EM_0 = EM_C$, por lo tanto

$$\frac{1}{2}\cancel{m}\, {v_0}^2 = \cancel{m} g\, H$$

de dónde,

$$
\begin{aligned}
v_C &= \sqrt{(7,4)^2 + 2\,(9,8)\,(0,7)} \\
&= 8,3\,\mathrm{m/s}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 2.1.1.14. *Un bloque de 5 kg empieza a moverse a una altura h = 1,20 m, sobre un plano inclinado a 37° con la horizontal como se ve en la figura adjunta. Después de alcanzar la parte inferior del plano, el bloque se desliza por una superficie horizontal. Si el coeficiente de fricción es de 0,30 para ambas superficies. Determinar:*

a. La velocidad que adquiere en la parte inferior del plano inclinado.

b. La distancia que desliza el bloque sobre la horizontal antes de detenerse.

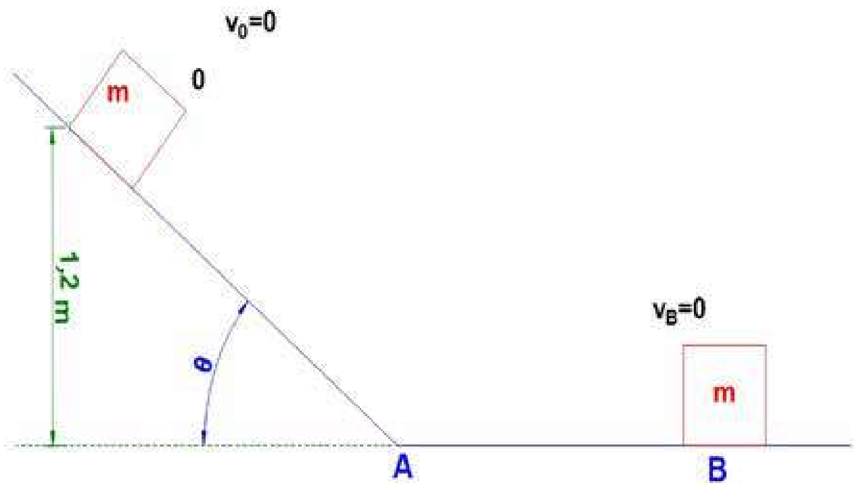


Figura 2.9. Movimiento de un bloque desde un plano inclinado a una superficie horizontal.

Datos:

$m = 5\,kg$

$y_{AO} = h = 1,2\,\mathrm{m}$

$\theta = 37°$

$\mu_C = 0,30$

$a)\, v_A = ?$

$b)\, x_{AB} = ?$

Respuesta (a): Aplicamos el teorema entre O y A, así $EM_0 = EM_A + W_{Froz}$, de donde se obtiene que:

$$\cancel{EC_0} + EP_{g[0]} = EC_A + \cancel{EP_{g[A]}} + W_{Froz}\,OA$$

$$m \cdot g \cdot y_{OA} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_A^2 + \mu_C \cdot F_C \cdot x_{OA}$$

Se sabe que,

$$
\begin{aligned}
F_c &= \mu_C \cdot N \\
&= \mu_C \cdot m \cdot g \cdot \cos(\theta)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\cancel{m} \cdot g \cdot y_{OA} = \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_A^2 + \mu_c \cdot \cancel{m} \cdot g \cdot \cos(\theta) \cdot x_{OA}
$$

Al despejar v_A se tiene que:

$$
\begin{aligned}
v_A &= \sqrt{2 \cdot g \cdot y_{OA} - 2 \cdot \mu_C \cdot g \cdot \cos(\theta) \cdot x_{OA}} \\
&= \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 1{,}2 - 2 \cdot 0{,}3 \cdot 9{,}8 \cdot \cos(37°) \cdot 2} \\
&= 3{,}76 \ m/s
\end{aligned}
$$

Respuesta (b): Se tiene que $EM_A = EM_B$, de donde:

$$
\begin{aligned}
EC_A + \cancel{EP_{g[A]}} &= \cancel{EC_B} + \cancel{EP_{g[B]}} + W_{Froz\ AB} \\
\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_A^2 &= \mu_C \cdot N \cdot x_{AB} \\
\frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_A^2 &= \mu_C \cdot \cancel{m} \cdot g \cdot x_{AB}
\end{aligned}
$$

Despejando x_{AB} se tiene que:

$$
\begin{aligned}
x_{AB} &= \frac{v_A^2}{2\mu_c \cdot g} \\
&= \frac{3{,}76^2}{2 \cdot 0{,}3 \cdot 9{,}8} \\
&= 2{,}4 \ m
\end{aligned}
$$

Ejercicio 2.1.1.15. *Una masa de 10 kg tiene inicialmente una velocidad de 3 m/s y se desliza por una pendiente sin fricción de 60°de inclinación, una distancia "d", hace contacto con el resorte no deformado de masa despreciable como muestra la figura, la masa se desliza 0,30 m adicionales antes de alcanzar momentáneamente el reposo y comprimir el resorte de K = 6 000 N/m. Determinar:*

a. La velocidad del bloque cuando hace contacto con el resorte.

b. La separación inicial "d" entre la masa y el resorte.

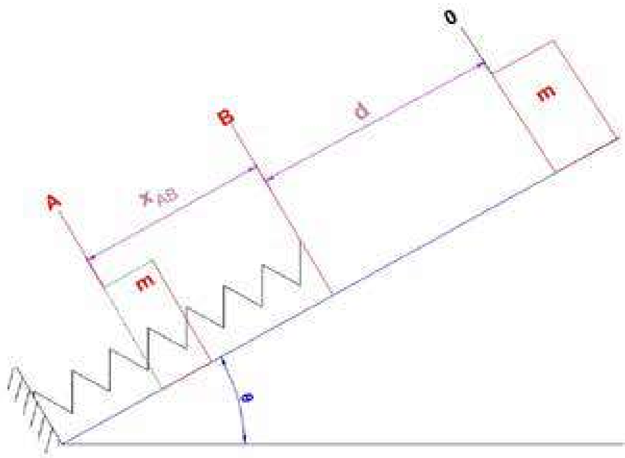


Figura 2.10. Deslizamiento de una masa hasta hacer contacto con un resorte.

Datos:

$m = 10\,\text{kg}$

$v_0 = 3\,\text{m/s}$

$\theta = 60°$

$x_{AB} = 0,30\,\text{m}$

$v_B = 0$

$K = 6\,000\,\text{N/m}$

$a)\; v_A = ?$

$b)\; d = ?$

Respuesta (a): Sabemos que $EM_0 = EM_B$, así:

$$EC_{[0]} + EP_{g[0]} = \cancel{EC_B} + \cancel{EP_{g[B]}} + EP_{E[B]}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_o^2 + m \cdot g \cdot y_{OB} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x_{AB}^2$$

Despejando y_{OB} se tiene que:

$$\begin{aligned} y_{OB} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot K \cdot x_{AB}^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_o^2}{m \cdot g} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot 6\,000 \cdot 0{,}3^2 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3^2}{10 \cdot 9{,}81} \\ &= 2{,}29\ m, \end{aligned}$$

nótese que x_{OB} se puede obtener a patir de $\operatorname{sen}(\theta) = \frac{y_{OB}}{x_{OB}}$, así este estará dado por:

$$\begin{aligned} x_{OB} &= \frac{y_{OB}}{\operatorname{sen}(\theta)} \\ &= \frac{2{,}29}{\operatorname{sen}(60°)} \\ &= 2{,}65\ m. \end{aligned}$$

Para obtener la distancia debemos recordar que $x_{OB} = d + x_{AB}$, al despejar la distacia se obtiene lo deseado:

$$\begin{aligned} d &= x_{OB} - x_{AB} \\ &= 2{,}65 - 0{,}30 \\ &= 2{,}351 \end{aligned}$$

Respuesta (b): Sabemos que $EM_O = EM_A$, de dónde:

$$\begin{aligned} EC_0 + EPg_{[0]} &= EC_A + \cancel{EPg_{[A]}} \\ \frac{1}{2}\cancel{m}{v_0}^2 + \cancel{m}g\, y_{OA} &= \frac{1}{2}\cancel{m}{v_A}^2, \end{aligned}$$

despejando v_A se obtiene lo deseado:

$$\begin{aligned} v_A &= \sqrt{2\left(\frac{1}{2}{v_0}^2 + g\, y_{OA}\right)} \\ &= \sqrt{2\left(\frac{1}{2}(3)^2 + 9,8\,(2)\right)} \\ &= 6{,}94\ m/s \end{aligned}$$

Ejercicio 2.1.1.16. *Un bloque de 6 kg se mueve hacia arriba de una pendiente de 37°, bajo la acción de una fuerza horizontal constante de 84 N, el coeficiente de fricción cinética es 0,15 y el bloque se desplaza 3,0 m hacia arriba por la pendiente. Determinar:*

a. El trabajo hecho por la fuerza de 84 N.

b. El trabajo hecho por la fuerza gravitacional.

c. La energía que se pierde por la fricción.

d. El trabajo realizado por la fuerza neta.

e. El cambio de energía cinética del bloque.

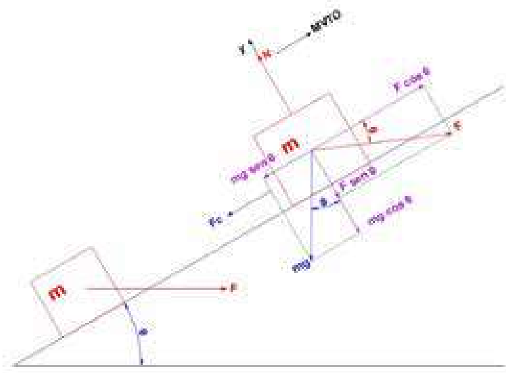


Figura 2.11. Movimiento de un bloque por una pendiente impulsado por una fuerza.

Datos:

$m = 6\,\mathrm{kg}$

$\theta = 37°$

$F = 84\,\mathrm{N}$

$\mu_C = 0,15$

$x_{OF} = 3\,\mathrm{m}$

Respuesta (a):

$$\begin{aligned} W_F &= F \cdot x_{OF}\ \cos(\theta) \\ &= 84\,(3)\ \cos(37^\circ) \\ &= 201{,}26\ J \end{aligned}$$

Respuesta (b):

$$\begin{aligned} W_w &= mg \cdot x_{OF}\ \cos 127^\circ \\ &= 6\,(9,8)\,(3)\ \cos(127^\circ) \\ &= -106,2\ J \end{aligned}$$

Respuesta (c):

$$\begin{aligned} E_{FRICCION} &= W_{Froz\,OF} \\ &= \mu_C \cdot N \cdot x_{OF} \\ &= \mu(F\,\text{sen}(\theta) + mg\cos(\theta)) \\ &= 0,15\,[84\,\text{sen}\,37^\circ + 6\,(9,8)\cos 37^\circ]\,3 \\ &= -43,9\ J \end{aligned}$$

Respuesta (d):

$$\begin{aligned} W_{NETO} &= W_F + W_w + W_N + W_{FC} \\ &= 201,26 + (-106,2) + 0 - 43,9 \\ &= 51{,}16\ J \end{aligned}$$

Respuesta (e): Aplicamos el teorema del trabajo y energía entre O y F, obteniendo que $W_F = \Delta EC + \Delta EP_g + W_{Froz}$, despejando ΔEC se obtiene que:

$$\Delta EC = W_F - \Delta EP_g - W_{Froz},$$

recordemos que:

$$\begin{aligned}\Delta EP_g &= EP_{gF} - \cancel{EP_{gO}}\\ &= m\,g\,y_{OF}\\ &= 6\,(9,8)\,(3\,\text{sen}\,37^\circ)\\ &= 106,16\ J.\end{aligned}$$

Por lo tanto, ΔEC será:

$$\begin{aligned}\Delta EC &= (201,26 + 106,16 - 43,9)\\ &= 51,2\ J\end{aligned}$$

Ejercicio 2.1.1.17. *Una partícula de masa de 12 kg se somete a una fuerza que varía con la posición, como se muestra en la figura adjunta, la partícula parte del reposo en $x = 0$. ¿Cuál es su velocidad? en:*

a. *x = 8 m*

b. *x = 16 m*

c. *x = 20 m*

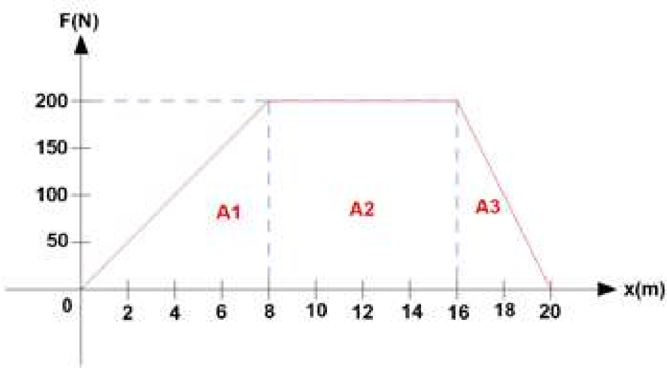


Figura 2.12. Trayectoria de una masa en respuesta a una fuerza variable en función de la posición.

Respuesta (a):

$$\begin{aligned} W_{0-8} &= \Delta EC \\ &= EC_8 - \cancel{EC_0} \\ &= \frac{1}{2}\, m \cdot v_8^2. \end{aligned}$$

Despejando v_8 se obtiene que:

$$\begin{aligned} v_8 &= \sqrt{\frac{2 \cdot W_{0-8}}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot A_1}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{1}{2}\,(8)\,(200)}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 800}{m}} \\ &= 11{,}55\; m/s \end{aligned}$$

Respuesta (b):

$$\begin{aligned} W_{8-16} &= \Delta EC \\ &= EC_{16} - EC_8 \\ &= \frac{1}{2}\, m\, v_{16}^2 - \frac{1}{2} m\; v_8^2. \end{aligned}$$

Despejando v_{16} se obtiene que:

$$\begin{aligned} v_{16} &= \sqrt{2 \cdot \frac{W_{8-16}}{m} + v_8^2} \\ &= \sqrt{2 \cdot \frac{A_2}{m} + v_8^2} \\ &= \sqrt{2 \cdot \frac{8 \cdot 200}{12} + 11{,}55^2} \\ &= 20{,}00\; m/s \end{aligned}$$

Respuesta (c):

$$\begin{aligned} W_{16-20} &= \Delta EC \\ &= EC_{20} - EC_{16} \\ &= \frac{1}{2}\, m\, v_{20}^2 - \frac{1}{2} m\ v_{16}^2 \end{aligned}$$

Despejando $v_1 6$ se tiene que:

$$\begin{aligned} v_{20} &= \sqrt{2 \cdot \frac{W_{16-20}}{m} + v_{16}^2} \\ &= \sqrt{2 \cdot \frac{A_3}{m} + v_{16}^2} \\ &= \sqrt{2 \cdot \frac{\frac{1}{2}\,(4)\,(200)}{12} + 20^2} \\ &= 21{,}60\ m/s \end{aligned}$$

Nota: Este ejercicio puede encontrarse en [7].

Ejercicio 2.1.1.18. *Fluye agua sobre un tramo de las Cataratas del Agoyán a razón de* $1,8 \times 108\ \ kg/s$ *y cae 60 metros. ¿Cuántos focos de 100* W*, pueden encenderse con esta potencia, considerando un rendimiento del 60* $\%$ *?*

Datos:

$Q = 1,8 \times 10^8\ kg/s$

$N = ?$ (Numero de focos)

$P_{\text{Foco}} = 100W$

$h = 60\ m$

$n = 80\,\%$

La potencia ideal estará dada por:

$$\begin{aligned}
P_{ideal} &= \frac{W}{t} \\
&= \frac{W \cdot h}{t} \\
&= \frac{m}{t} \cdot m \cdot g \cdot h \\
&= 1{,}8 \times 10^{8}\ kg/s \cdot 9{,}81 \cdot 60\ m \\
&= 1{,}0584 \times 10^{11}\ W
\end{aligned}$$

Se sabe que $n = \frac{P_{real}}{P_{ideal}}$, por lo que:

$$\begin{aligned}
P_{real} &= n \cdot P \\
&= 0,60 \left(1,0584 \times 10^{11}\ W\right) \\
&= 6,3504 \times 10^{10}\ W
\end{aligned}$$

Por último, el número de focos estará dado por:

$$\begin{aligned}
\text{N° focos} &= \frac{6,3504 \times 10^{10}\ W}{100} \\
&= 6,35 \times 10^{8}
\end{aligned}$$

Ejercicio 2.1.1.19. *Un elevador con 800 kg de masa total empieza a moverse desde el reposo, si se desplaza hacia arriba durante 6 segundos, con aceleración constante hasta que alcanza una velocidad de crucero de 3 m/s. Determinar:*

a. La potencia promedio del motor del elevador durante este periodo.

b. La potencia ejercida mientras se mueve a su velocidad de crucero.

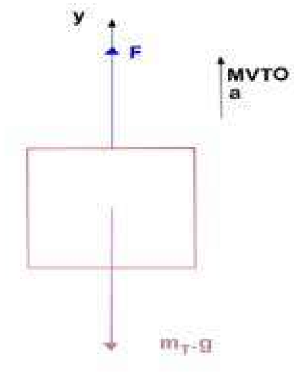


Figura 2.13. Desplazamiento de un elevador verticalmente.

Datos:

$m = 800\ kg$

$v_0 = 0\ m/s$

$t = 6\ s$

$a_{OA} = \text{constante}$

$v_A = 3\ m/s$

$P_{media} = ?$

$P_A = ?$

Respuesta (a): La potencia promedio del motor del elevador durante este periodo estará dada por:

$$\begin{aligned} P_{media} &= \frac{W}{t} \\ &= \frac{F \cdot h}{t} \end{aligned}$$

Ahora, para hallar F, considérese:

$$\overset{+}{\uparrow} \sum F_y = ma$$

$$F - mg = m \cdot a$$

De donde despejando F, se obtiene que:

$$F = m \cdot a + mg,$$

Para obtener la aceleración a, debemos recurrir a la fórmula $v_A = \cancel{v_0} + at_{0A}$, de donde se tiene que:

$$\begin{aligned} a &= \frac{v_A}{t} \\ &= \frac{3}{6} \\ &= 0{,}5\ m/s^2 \end{aligned}$$

Así la fuerza será:

$$\begin{aligned} F &= m \cdot a + m \cdot g \\ &= 800 \cdot 0{,}5 + 800 \cdot 9{,}81 \\ &= 8\ 248\ N \end{aligned}$$

Para obtener la altura h, debemos recurrir a la fórmula:

$$\begin{aligned} h &= \cancel{v_0} \cdot t + \frac{1}{2}at^2 \\ &= \frac{1}{2}(0,5)(6)^2 \\ &= 9\ m \end{aligned}$$

Con estos datos podemos hallar la potencia media:

$$\begin{aligned} P_{media} &= \frac{F \cdot h}{t_{0-6}} \\ &= \frac{8\ 248 \cdot 9}{6} \\ &= 12\ 372\ W \end{aligned}$$

$P_A = F' v_A$ (Ec,4)

$\uparrow v = \text{cote} \Rightarrow \text{a} = 0$

1. $\overset{+}{\uparrow} \sum Fy = 0 \therefore F' m_T \cdot g = 7\,840\,\text{N}$

$P_A = 7\,840\,(3) \Rightarrow P_A = 23\,520\,\text{W} \Rightarrow \text{Resp}\,(\text{b})$

Ejercicio 2.1.1.20. *En una máquina de Atwood (figura adjunta) cuelgan dos masas de 0,40 kg y 0,80 kg, dichas masas son mantenidas en reposo una alado de otra, y después se sueltan, si se ignora la fricción, ¿Cuál es la velocidad de cada masa en el instante en el que ambas se han movido a 60 m?*

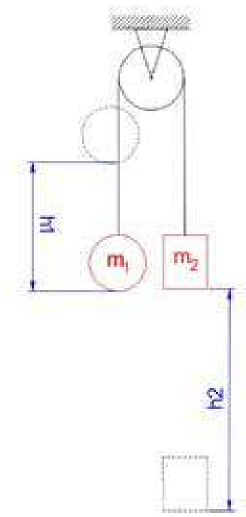


Figura 2.14. Máquina de Atwood.

Datos:

$m_1 = 0,40\,\mathrm{kg}$
$m_2 = 0,80\,\mathrm{kg}$
$v_0 = \ 0$
$v_F = ?$
$h_1 = h_2 = 0,60\,\mathrm{m}$
$\mathrm{EM}_O = EM_F$

En el sistema aplicamos el teorema (del trabajo y energía). Entre la posición "O" y la posición "F", donde tomamos como nivel de referencia (N.R) para medir altura el nivel "F" en donde se halla la masa dos (m_2) en este punto, así se tiene que:

$$m_1\, g\, y_{OF} + m_2\, g\, y_{OF} = \frac{1}{2}\,(m_1 + m_2)\, v_F^2 + m_1\, g\,(h_1 + h_2)\,,$$

despejando v_F, se obtiene lo deseado:

$$\begin{aligned} v_F &= \sqrt{\frac{2\,[m_1\, g\, y_{OF} + m_2\, g\, y_{OF} - m_1\, g\,(h_1 + h_2)]}{(m_1 + m_2)}} \\ &= \sqrt{\frac{2\,[0,40\,(9,8)\,(0,60) + 0,80\,(9,8)\,(0,60) - 0,40\,(9,8)\,(2 \times 0,60)]}{(0,40 + 0,80)}} \\ &= \sqrt{3,92} \\ &= 1,98\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

Ejercicio 2.1.1.21. *Un bloque de 120 kg de masa se desliza desde el reposo hacia debajo de una pendiente sin fricción de 55° y lo detiene un resorte con una constante K = 5,0 x* 10^4 *N/m. El bloque que se desliza 5 m desde el punto de partida, hasta el punto donde queda momentáneamente contra el reposo. Determine la distancia que se comprime el resorte.*

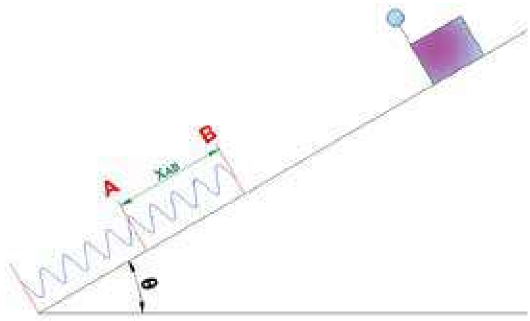


Figura 2.15. Deslizamiento de un bloque hasta la detención por un resorte.

Datos:

$m = 120\ kg$

$v_0 = 0\ m/s$

$\theta = 55°$

$K = 5 \times 10^4\ N/m x_{OB} = 5\,\mathrm{m}$

$x_{OA} = ?$

$v_B = 0\ m/s$

Aplicamos el teorema entre O y B, obteniendo que:

$$\mathrm{EM}_O = EM_B$$

$$\cancel{EC_O} + EPg_O = \cancel{EC_B} + \cancel{EPg_B} + EP_{EO}$$

$$m\,g\,x_{OB} = \frac{1}{2}\,k\,x_{AB}^2,$$

despejando x_{AB}, se obtiene lo deseado:

$$\begin{aligned} X_{AB} &= \sqrt{\frac{2\,mg\,x_{OB}\,\mathrm{sen}(\theta)}{k}} \\ &= \sqrt{\frac{2\,(120)\,(9,81)\,(5)\,\mathrm{sen}(55°)}{5 \times 10^4}} \\ &= \sqrt{0,19266} \\ &= 0{,}44\ m \end{aligned}$$

Ejercicio 2.1.1.22. *Un bloque de* $1,2kg$ *de masa se desliza* $8m$ *descendiente por una rampa sin fricción inclinada 30° por la horizontal desde el reposo. Luego se desplaza por una superficie horizontal rugosa donde* $\mu c = 0,3$. *Determinar:*

a. La velocidad del bloque al final de la pendiente.

b. La velocidad después de moverse 2 m sobre la superficie rugosa.

c. La distancia que viaja sobre la superficie horizontal antes de detenerse.

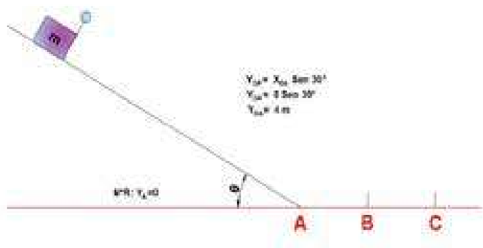


Figura 2.16. Deslizamiento de un bloque por una pendiente hasta una superficie horizontal.

Datos:

$m = 1,2\,\text{kg}$

$x_{OA} = 8\,\text{m}$

$\theta = 30°$

$\mu_C = 0,3$

a) $v_A = ?$

b) $v_B = ?$

$x_{AB} = 2\,\text{m}$

c) $x_{AC} = ?$

$v_C = 0$

Respuesta (a): Aplicamos el teorema entre O y A:

$$\begin{aligned}
\mathrm{EM}_O &= \mathrm{EM}_A \\
\cancel{EC_O} + EP_O &= EC_A + \cancel{EPg_A} \\
\cancel{m}g\, y_{OA} &= \frac{1}{2}\cancel{m}v_A^2,
\end{aligned}$$

despejando v_A, tenemos lo deseado:

$$\begin{aligned}
v_A &= \sqrt{2g\, y_{OA}} \\
&= \sqrt{2\,(9,81)\,(4)} \\
&= 8{,}55\; m/s
\end{aligned}$$

Respuesta (b): Aplicamos el teorema entre A y B:

$$\begin{aligned}
\mathrm{EM}_A &= EM_B + W_{FROZ\,AB} \\
EC_A &= EC_B + \mu_C \cdot N \cdot x_{AB} \\
\frac{1}{2}\cancel{m}v_A^2 &= \frac{1}{2}\cancel{m}v_B^2 + \mu_C \cdot \cancel{m}g\, x_{AB},
\end{aligned}$$

despejando v_B, tenemos lo deseado:

$$\begin{aligned}
v_B &= \sqrt{2\left[\frac{1}{2}v_A^2 - \mu_C \cdot g \cdot x_{AB}\right]} \\
&= \sqrt{2\left[\frac{1}{2}(8,85)^2 - 0,3\,(9,8)\,(2)\right]} \\
&= \sqrt{66{,}64} \\
&= 8{,}16\; m/s
\end{aligned}$$

Respuesta (c): Aplicamos el teorema entre A y C:

$$\mathrm{EM}_A = EM_C + W_{FROZ\cdot AC}$$

$\frac{1}{2}m\, {v_A}^2 = 0 + \mu_c \cdot N \cdot x_{AB} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}\, mv_A^2}{\mu_c \cdot m \cdot g} \Rightarrow$
$x_{AC} = \frac{\frac{1}{2}(8{,}85)^2}{0{,}3(9{,}8)} \Rightarrow x_{AC} = 13,3\,\mathrm{m} \Rightarrow \mathrm{Resp\,(c)}$

Ejercicio 2.1.1.23. *A un bloque de 3,0 kg se le da una velocidad inicial de 10 m/s en el pie de una pendiente de 25°. La fuerza de fricción que retarda su MVTO es de 28 N. Responda:*

a. Si el bloque se desplaza hacia arriba de la pendiente, ¿Qué distancia se mueve antes de detenerse?

b. Luego, ¿Se desliza hacia debajo de la pendiente?

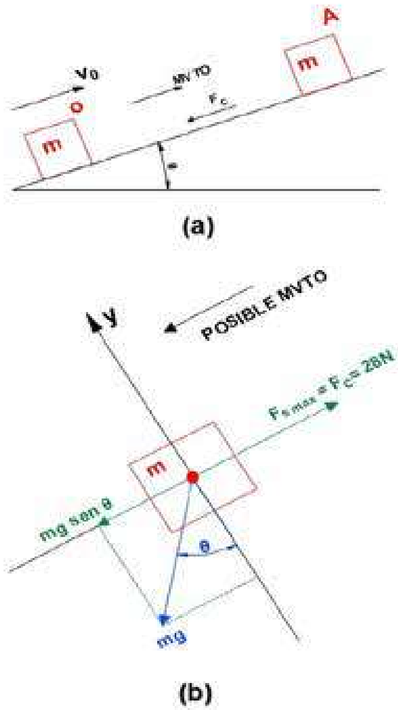


Figura 2.17. Movimiento de un bloque por una pendiente con un impulso inicial. a) Desplazamiento del bloque. b) D.c.l. del bloque en la pendiente

Datos:

$m = 3\,\mathrm{kg}$

$v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$

$\theta = 25°$

$Fc = 28\,\mathrm{N}$

a) $x_{OA} = v_A = 0$

b) Se mueve hacia abajo $\swarrow$? = ?

Respuesta (a): Aplicamos el teorema: entre el punto O y A:

$$\mathrm{EM}_O = \mathrm{EM}_A + W_{FC \cdot OA} : y_O = 0$$

$\frac{1}{2}m\,{v_0}^2 = mg\,y_{OA} + Fc \cdot x_{OA}\,(\mathrm{Ec,1})$

$mg\,x_{OA} \cdot \mathrm{sen}\theta + Fc\,x_{OA} = \frac{1}{2}\,m{v_0}^2$

$x_{OA}\,(mg\,\mathrm{sen}\theta + Fc) = \frac{1}{2}\,m{v_0}^2$

$x_{OA} = \frac{\frac{1}{2}(3)(10)^2}{[3(9{,}8)\mathrm{sen}\,25°+28]} \Rightarrow$

$x_{OA} = 3,71\ \mathrm{m}\ \Rightarrow \mathrm{Resp\,(a)}$

Diagrama del cuerpo libre, en A

$v_A = 0$

$mg\,\mathrm{sen}\theta = 3\,(9,8)\ \mathrm{sen}\,25° = 12,4\,\mathrm{N}$

Luego que se detiene en "A", el bloque podría desplazarse hacia abajo, debido a la componente del peso: $mg\ \mathrm{sen}\theta = 12,4\,\mathrm{N}$, pero la fuerza de fricción actuaria hacia arriba (Contraria al posible MVTO.) $F_C = F_S =\ 28\ \mathrm{N}$, y por ende como: $F_S =\ 28\ \mathrm{N} >\ mg\,\mathrm{sen}\theta =\ 12,4\,\mathrm{N}$. El bloque permanecerá en reposo en el punto "A" $\Rightarrow \mathrm{Resp\,(b)}$

Ejercicio 2.1.1.24. *Dos bloques, uno de masa $m_1 = 60$ kg y el otro de $m_2 = 80$ kg, se conectan entre sí por medio de una cuerda, como se ve en la figura adjunta. La polea no presenta fricción y su masa es despreciable. El coeficiente de fricción cinética entre m_1 y la superficie es de 0,15 determine el cambio de la energía cinética de la masa m_1 cuando se mueve 30 m de "C" a "D".*

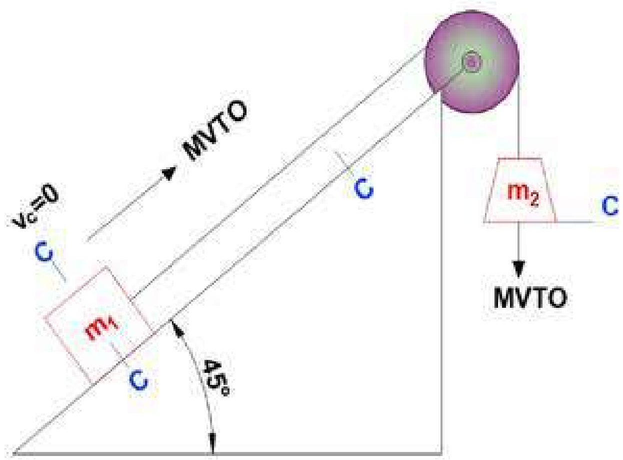


Figura 2.18. Movimiento de dos masas por medio de una polea.

Datos:

$m_1 = 60\,\text{kg}$

$m_2 = 80\,\text{kg}$

$\mu_c = 0,15$

$\Delta EC_{CD} = ?$

$x_{CD} = 30\,\text{m}$

$y_{CD} = x_{CD}\,\text{sen}\,45°$

$y_{CD} = 21,2131\,\text{m}$

Sabemos que

$$\begin{aligned}\Delta EC_{CD} &= EC_D - \cancel{EC_C}\ (v_C = 0)\\ &= \frac{1}{2} m_{TOTAL}\, v_D^2\ (\text{Ec},1)\end{aligned}$$

Aplicamos el teorema del trabajo y energía, considerando la Fig. 2:

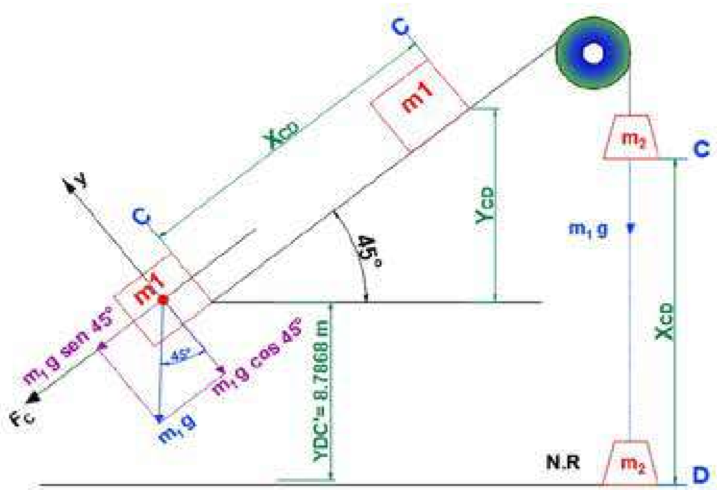


Figura 2.19. Fuerzas y desplazamiento de las masas.

$\mathrm{EM}_C = EM_D + W_{FROZ\,CD\,(m_1)}$

$\cancel{EC_C} + EPg_C = EC_D + EPg_D + W_{FROZ\,CD\,(m_1)}$

$m_1\, g\, y_{CD'} + m_2\, g\, x_{CD} = \frac{1}{2}\,(m_1 + m_2)\, v_D^2 + m_1\, g\,\,(y_{CD'} + y_{CD}) + Froz \cdot x_{CD}$

$\frac{1}{2}\,(m_1 + m_2)\, v_D^2 = m_1\, g\, y_{CD'} + m_2\, g\, x_{CD} - m_1\, g\,\,(y_{CD'} + y_{CD}) - \mu_c \cdot N \cdot x_{CD} \Rightarrow$

$y_{CD'} + y_{CD} = x_{CD} = 30\,\mathrm{m}$

$y_{CD'} = x_{CD} - y_{DC}$

$y_{CD'} = 30 - 21,2132$

$y_{CD'} = 8,7868\,\mathrm{m}$

$v_D^2 = \frac{2[60(9{,}8)(8{,}7868)+80(9{,}8)(30)-60(9{,}8)(30)-(0{,}15)(60)(9{,}8)\cos\,45°(30)]}{(60+80)}$

$v_D^2 = 131\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \Rightarrow v_D = 11,45\,\mathrm{m/s}^2$

Segundo método: por Cinemática y Dinámica al sistema: CD: M.R.U.V.A:

$v_D^2 = v_C^2 + 2a \cdot x_{CD} \Rightarrow v_D^2 = 2 \cdot a \cdot x_{CD}\;(\mathrm{Ec,2})$

Segunda Ley de Newton:

$$\sum^{+MVTO} Factivas = m_{TOTAL} \cdot a \therefore m_B\, g - m_A\, g \operatorname{sen} 45^\circ - F_C = m_{TOTAL} \cdot a \Rightarrow$$

$a = \frac{80(9{,}8)-60(9{,}8)\operatorname{sen}45^\circ - 0{,}15(60)(9{,}8)\ \cos 45^\circ}{(60+80)} \Rightarrow a = 2,18467\,\mathrm{m/s^2}$

en (Ec,2) $v_D^2 = 2\,(2,18467)\,(30) \Rightarrow\ v_D^2 = 131\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s^2}} \Rightarrow v_D = 11,45\,\mathrm{m/s}$

en (Ec,1) $\Delta EC_{CD} = \frac{1}{2}\,(60+80)\,(131)$

$\Delta EC_{CD} = 9\,170\,\mathrm{J} \Rightarrow$ Respuesta

Ejercicio 2.1.1.25. *Una esquiadora parte de la cima de una enorme bola de nieve sin fricción, (Punto 0) con una velocidad (rapidez) despreciable en "0", y baja esquiando por el costado (Figura adjunta). Determinar:*

a. La posición "A" (h) en donde pierde el contacto con la bola de nieve y sigue una trayectoria tangencial.

b. ¿Qué ángulo θ forma con la vertical una línea radial que va del centro de la bola a la esquiadora? (Ver figura).

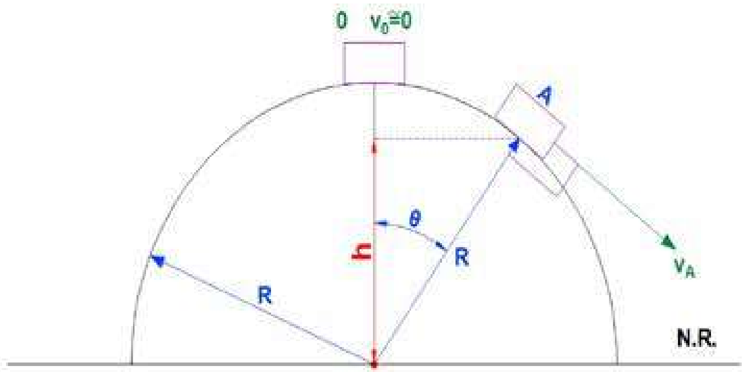


Figura 2.20. Desplazamiento de una esquiadora desde la cima de una bola de nieve.

Respuesta (a): Aplicamos el teorema del trabajo y energía entre "0" y "A" (conservación energía mecánica):

$$
\begin{aligned}
\mathrm{EM}_O &= \mathrm{EM}_A \\
\cancel{EC_O} + EPg_O &= EC_A + EPg_A \\
\cancel{m}\, g\, R &= \cancel{m}\, g\, h + \frac{1}{2}\cancel{m} v_A^2 \\
g\, h &= \ g\, R - \frac{1}{2} v_A^2
\end{aligned}
$$

Despejando la altura obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
h &= \frac{gR}{g} - \frac{v_A^2}{2g} \\
&= R - \frac{v_A^2}{2g}
\end{aligned}
$$

Realizamos el diagrama del cuerpo libre (d.c.l) en la posición “A”:

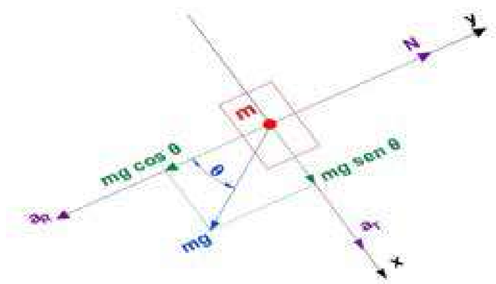


Figura 2.21. Diagrama de cuerpo libre en A.

$$\overset{\leftarrow +}{\sum} Fy = m \cdot a_y$$

$$mg\cos\theta - N = m\, a_R$$

Cuando pierde contacto:

$N = 0 \;\; ; \;\; a_R = \frac{v_A^2}{R}$

$mg\cos\theta = m\,\frac{v_A^2}{R} \Rightarrow v_A^2 = gR \cdot \frac{h}{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow v_A^2 = gh; \;\; en \;\; (\text{Ec,1})$

$h = R - \frac{gh}{2g} \Rightarrow h + \frac{h}{2} = R \Rightarrow$

$\frac{3}{2}h = R \Rightarrow h = \frac{2}{3}R \Rightarrow \text{Resp (a)}$

$\cos\theta = \frac{h}{R} = \frac{\frac{2}{3}R}{R} = \frac{2}{3} \Rightarrow$

$\theta = 48,2° \Rightarrow \text{Resp (b)}$

Ejercicio 2.1.1.26. *Cierto resorte no obedece la Ley de Hooke, ejerce una fuerza de restauración: $F_{K(x)} = -80x - 36x^2$, si se estira o comprime el resorte y se desprecia la masa del resorte. Determinar:*

a. *Encuentre una expresión para la energía potencial: $EP_{(x)}$, del resorte, considerando que cuando $x = 0 \to EP = 0$.*

b. *Un objeto con masa de 2 kg se encuentra en una superficie horizontal sin fricción, se une a este resorte, y se tira de el hasta desplazarlo 80 cm. A la derecha (Dirección + x) y estirar el resorte, y en esta posición se suelta el bloque con el resorte ¿Qué rapidez tiene el objeto cuando está a 40 cm a la derecha de la posición de equilibrio del resorte?*

Solución:

Datos: [3]

$F_{K(x)} = -80x - 36x^2 \Rightarrow x\,(m) \;\; ; \;\; F_K\,(N)$

a) $EP_{(x)} =? \Rightarrow x = 0 \Rightarrow EP = 0$

b)$\text{m} = 2\,\text{kg}$

$x_{OA} = 0,80\,\text{m}$

$\overleftarrow{v_B} = ?$

$x_{OB} = 0,40\,\text{m}$

$F_{(x)} = \frac{dEP}{dx} \Rightarrow \int\limits_{EP=0}^{EP} dEP = \int\limits_{x_0=0}^{x} -F_{(x)}dx \Rightarrow$

$EP = -\int\limits_{0}^{x} (-80x - 36x^2)dx$

$EP = \frac{80x^2}{2} + \frac{36x^3}{3}\Big|_0^x$

$EP_E = 40x^2 + 12x^3 \Rightarrow \text{Resp (a)}$

b) $\mathrm{EM}_A = EM_B$

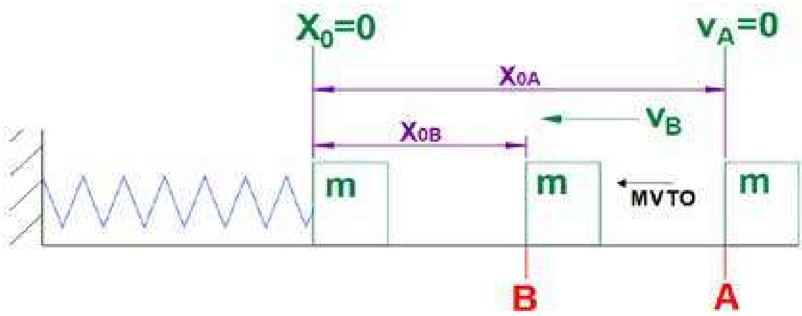


Figura 2.22. Movimiento de una masas debido a un resorte.

$$EC_A + EP_{EA} = EC_B + EP_{EB}$$
$$40x_A^2 + 12x_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + (40x_B^2 + 12x_B^2) \Rightarrow$$
$$v_B^2 = \left\{\left[40(0,80)^2 + 12(0,80)^2\right] - \left[40(0,4)^2 + 12(0,4)^2\right]\right\}\frac{2}{2}$$
$$v_B^2 = 17,28 \Rightarrow v_B = 4,1 \text{ m/s} \Rightarrow \text{Resp (b)}$$

2.2. Ejercicios propuestos

Ejercicio 2.2.0.1. *Sobre una partícula se aplica una fuerza:* $\overrightarrow{F} = \left(5x^2\overrightarrow{i} - 6y\overrightarrow{j}\right)$ N *, en "x" & "y" en metros, y hace que la partícula se desplace desde una posición inicial:* $\overrightarrow{r_0} = (3\,, 6)$ m*. Hasta una posición final* $\overrightarrow{r_F} = (-5\,, 10)$ m*. Determine el trabajo realizado por esta fuerza.*

Ejercicio 2.2.0.2. *¿Qué trabajo es realizado por una fuerza* $\overrightarrow{F} = \left(-3x^3\overrightarrow{i} + 4y^2 - 5z\right)$ N*, x, y, z, (metros), que mueve una partícula desde una posición inicial* $\overrightarrow{r_0} = \left(-2\,\overrightarrow{i} + 5\,\overrightarrow{j} + 4\,\overrightarrow{k}\right)$ m*, Hasta una posición final* $\overrightarrow{r_F} = \left(5\,\overrightarrow{i} - 6\,\overrightarrow{j} - 8\,\overrightarrow{k}\right)$ m*?*

Ejercicio 2.2.0.3. *Una fuerza neta que varía en el tiempo actúa sobre una partícula de 8 kg y produce en esta un desplazamiento dado por:* $x = -4 + 5t - 6t^2 + 2t^3$*, donde t (segundos) y x (metros). Determine el trabajo realizado sobre la partícula durante los primeros 6n segundos de movimiento.*

Ejercicio 2.2.0.4. *Un bloque de 6,5 kg unido a una cuerda de 1,5 m de largo gira en círculo sobre una superficie horizontal. Determinar:*

a. *Si la superficie es lisa, identifique todas las fuerzas que actúan sobre el bloque y demuestre que el trabajo efectuado por cada fuerza es cero para cualquier desplazamiento del bloque.*

b. *Si existiera un coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y la superficie es de 0,40 encuentre la energía perdida por la fricción en cada revolución.*

Ejercicio 2.2.0.5. *Una fuerza F actúa sobre una partícula m, la partícula parte del reposo en t=0.*

a. *Demuestre que la potencia instantánea entregada por la fuerza en cualquier tiempo t es* $\left(\frac{F^2}{m}\right) t$.

b. *Si F = 200 N y m = 10 kg, ¿Cuál es la potencia entregada en t = 5 s?*

Ejercicio 2.2.0.6. *Cuando se extiende un resorte hasta cerca de su límite elástico. Su fuerza satisface la ecuación* $F = 20x + 200x^3$*, en la cual cuando* $x\,(m) \rightarrow F\,(n)$*. Calcule el trabajo efectuado por esta fuerza (del resorte), cuando el resorte se estira 0,20 m.*

Ejercicio 2.2.0.7. *Una partícula de masa "m" está unida a dos resortes idénticos sobre una mesa horizontal sin fricción, como se muestra en la Fig. (a) y (b). Ambos resortes tienen constante K. si la partícula se jala una distancia x a lo largo de una dirección perpendicular a la configuración inicial (Fig. b) de los resortes. Demuestre que la fuerza establecida sobre la partícula por los resortes es:* $K\,A^2 2\,K\,L^2 - 2\,K\,L\sqrt{L^2 + A^2}$.

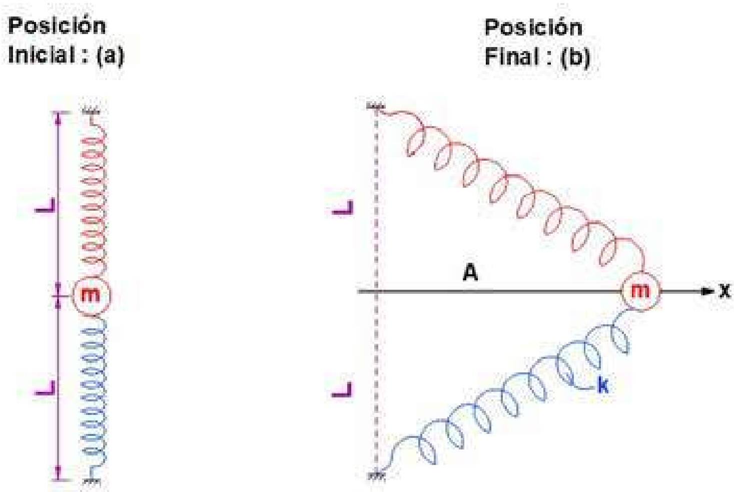


Figura 2.23. Movimiento de una masa unida a dos resortes a un punto x. a) Posición de los resortes en reposo. b) Posición de los resortes luego del movimiento de la mas.

Ejercicio 2.2.0.8. *Una fuerza conservativa aislada que actúa sobre una partícula varía como:* $\overrightarrow{F} = \left(2y\overrightarrow{i} + x^2\overrightarrow{j}\right)$ N, *Donde A y B son constantes y x está en metros.*

a. *Determinar la energía potencia asociada a esta fuerza, tomando EP = 0, en x = 0.*

b. *Encuentre el cambio en la energía potencial y el cambio en la energía cinética cuando la partícula se mueve desde x = 2 m a x = 3 m.*

Ejercicio 2.2.0.9. *Una fuerza que actúa sobre una partícula que se mueve en el plano x y es:* $\overrightarrow{F} = \left(2y\overrightarrow{i} + x^2\overrightarrow{j}\right)$ N. *Donde x e y se miden en metros. La partícula, se mueve desde el origen hasta una posición final cuyas coordenadas son: x = 5 m y y = 5 m, como se puede ver en la figura. Calcule el trabajo realizado por* $\overrightarrow{F}$ *a lo largo de:*

a. *OAC*

b. *OBC*

c. *OC*

d. *La fuerza* $\overrightarrow{F}$ *es conservativa o no conservativa? Explique.*

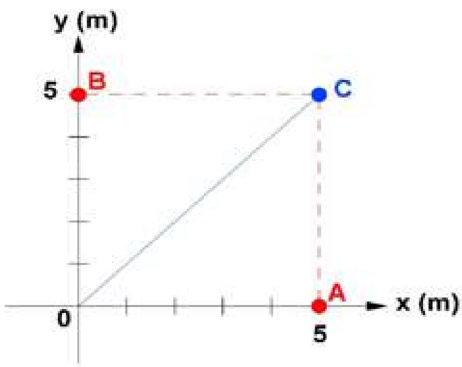


Figura 2.24. Movimiento de una partícula en un plano.

Ejercicio 2.2.0.10. *Una fuerza conservativa aislada:* $F_{(x\ )} = (2x^2 - 6x + 3)$ N*; actúa sobre una partícula de 10 kg, donde x(m). Cuando la partícula se mueve a lo largo de este eje x: desde x = 1 hasta m x = 6 m. Determinar:*

a. *El trabajo efectuado por esta fuerza.*

b. *El cambio en la energía potencial de la partícula.*

c. *Su energía cinética en: x = 5 m, si su velocidad en x=1 m es 3 m/s.*

Ejercicio 2.2.0.11. *Una esfera se desliza sin fricción dando un giro completo como se muestra en la siguiente figura. Si la bolita se suelta desde una altura h = 4,50 R. Determinar:*

a. *Su velocidad en el punto A.*

b. *Si la masa de la esfera es de 10 gramos cuál es la fuerza normal que se aplica sobre la bolita en el punto A.*

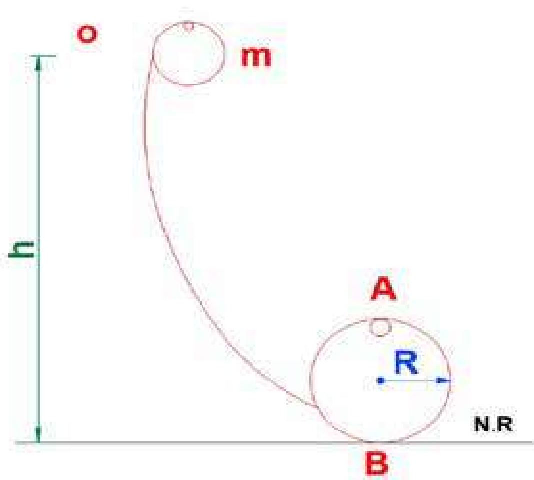


Figura 2.25. Deslizamiento de una esfera desde una altura.

Ejercicio 2.2.0.12. *Una partícula de 415 gramos de masa se dispara desde el punto "0", como se muestra en la figura, con una velocidad inicial v_0, que tiene una componente horizontal de 40 m/s. La partícula asciende hasta una altura máxima con respecto a "0" de 50 m. Aplicando el teorema del trabajo y la energía. Determinar:*

a. *La componente de la vertical v_0.*

b. *El trabajo efectuado por la fuerza gravitacional sobre la partícula durante el MVTO de "0" a "B".*

c. *Las componentes horizontal y vertical del vector velocidad cuando la partícula llegue a "B".*

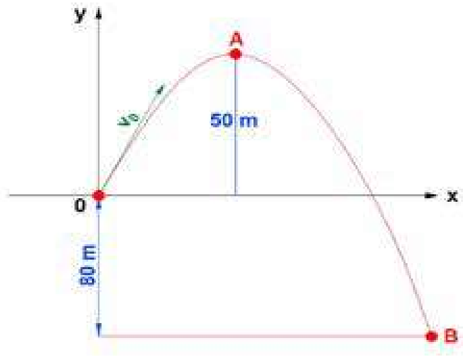


Figura 2.26. Movimiento parabólico de una partícula.

Ejercicio 2.2.0.13. *Una bola de 4 kg se una a un hilo de pescar que soporta una tensión máxima de 150 N, si la bola se suelta desde el reposo, en la posición horizontal como indica la figura a que ángulo θ (con la vertical) se rompe el hilo.*

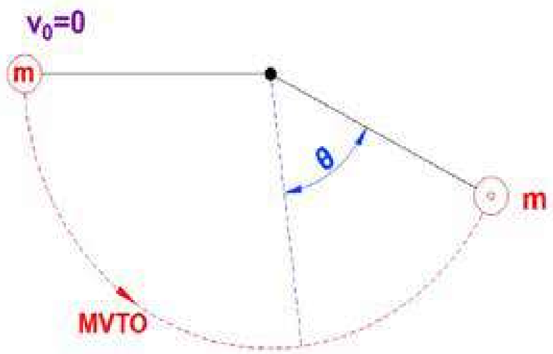


Figura 2.27. Desplazamiento de una bola unida a un hilo hasta que este se rompa.

Ejercicio 2.2.0.14. *Una bola de masa "m" gira en un círculo vertical de radio R. La bola tiene una velocidad $\vec{v_0}$ en su punto mas alto. Considere el nivel de referencia (N.R) en el punto mas bajo de la trayectoria, Determinar:*

a. *Utilice el ángulo θ, como el que se muestra en la siguiente figura, y obtenga una expresión para la velocidad v en cualquier instante en función de:* R, θ, v_0, g (gravedad).

b. *Que la velocidad mínima v_0 es necesaria para que la bola se mueva al menos una revolución*

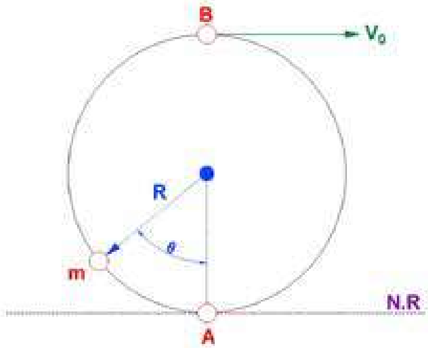


Figura 2.28. Trayectoria de una bola girando en círculos.

Ejercicio 2.2.0.15. *Una niña se desliza por una resbaladilla sin fricción como se muestra en la figura. En términos de R y de H, exprese a que altura h perderá contacto en la sección de radio R.*

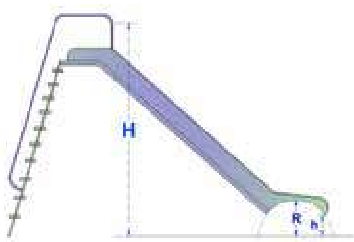


Figura 2.29. Diagrama de una resbaladera de altura H.

Ejercicio 2.2.0.16. *Un bloque de 8 kg empieza a moverse desde una altura h = 150 cm, sobre un plano que tiene un ángulo de inclinación de 37°, como se muestra en la figura después de alcanzar la parte inferior del plano, el bloque se desliza por una superficie horizontal, si el coeficiente de fricción en ambas superficies es de 0,15. Determine la distancia que se desliza el bloque sobre la horizontal antes de detenerse.*

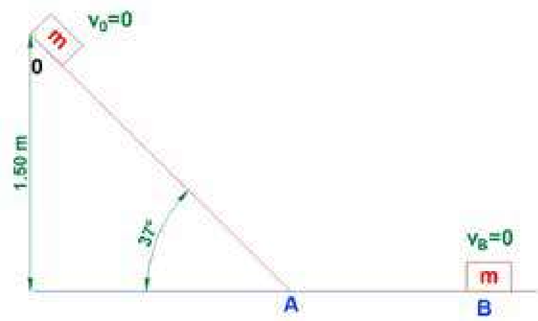


Figura 2.30. Desplazamiento un bloque por un plano inclinado hasta una superficie horizontal.

Ejercicio 2.2.0.17. *El coeficiente de fricción entre la masa* $m_1 = 5\,\mathrm{kg}$ *y la superficie es de 0,30. El sistema parte del reposo. Determine la velocidad de la masa* $m_2 = 8\,\mathrm{kg}$ *cuando a descendido 2 m, como se muestra en la Fig.2.31:*

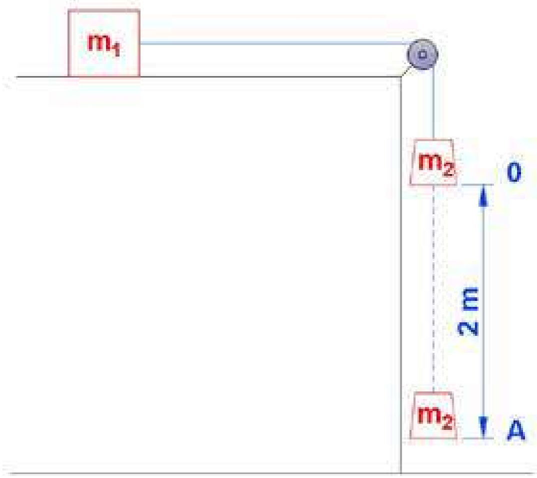


Figura 2.31. Movimiento descendente de una masa en una polea.

Ejercicio 2.2.0.18. *A partir del reposo en el punto A de la siguiente figura, una masa de 1 kg se desliza sobre un alambre curvo. El segmento de A hacia B no tiene fricción y el segmento de B hacia C es rugoso, determinar:*

a. La velocidad de la masa en B.

b. *Si la masa se detiene en C, encuentre la energía perdida debido a la fricción conforme se mueve de B a C.*

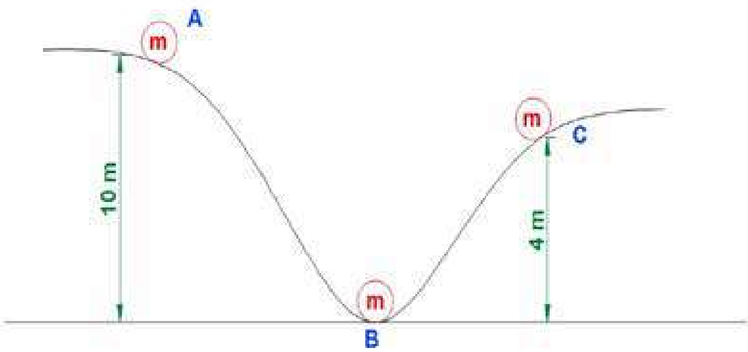


Figura 2.32. Desplazamiento descendente y ascendente de una masa por un alambre curvo.

Ejercicio 2.2.0.19. *Un bloque se desliza hacia abajo por una pista curva sin fricción y luego sube por un plano inclinado que tiene coeficiente de fricción cinética μ_C. Utilizando el teorema del trabajo y la energía, demuestre que la altura máxima alcanzada por el bloque en el plano inclinado es según la siguiente figura :*

$$y_{\text{máx}} = \frac{h}{1+\mu_C \cdot ctg\theta}$$

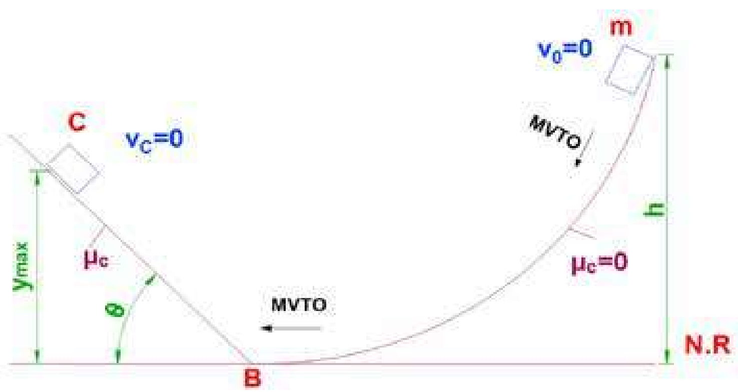


Figura 2.33. Desplazamiento descendente y ascendente de una masa por una pista.

Ejercicio 2.2.0.20. *Una masa de 5 kg parte del reposo y se desliza por una pendiente sin fricción de 40° una distancia "d" u hace contacto con un resorte no deformado de masa despreciable, como se muestra en la siguiente figura. La masa se desliza 0,40 m adicionales cuando alcanza momentáneamente el reposo y comprime al resorte* $[K = 800\,\mathrm{N/m}]$. *Determine la separación inicial "d" entre la masa y el resorte.*

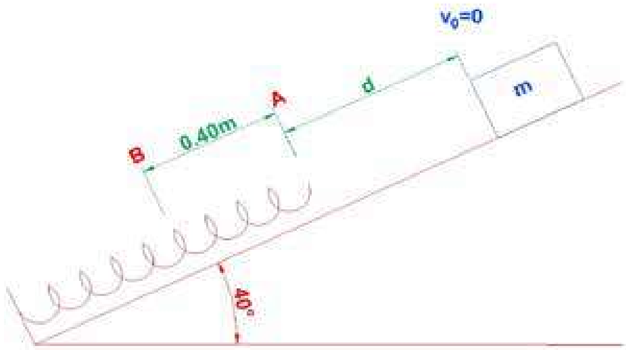


Figura 2.34. Deslizamiento de una masa por una pendiente hasta hacer contacto con un resorte.

Ejercicio 2.2.0.21. *Una masa de 3 kg se sostiene 2,4 m arriba de un resorte no comprimido sin masa que tiene una constante elástica de 3 200 N/m y después se deja caer sobre el resorte . Determinar:*

a. ¿Cuánto se comprime el resorte?

b. ¿Cuánto se comprime el resorte si existiera una resistencia del aire constante de 10 N, que actúa sobre la masa durante la caída?

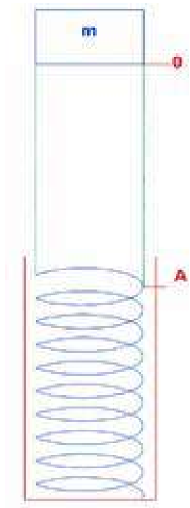


Figura 2.35. Caída de una masa a un resorte no comprimido.

Ejercicio 2.2.0.22. *En la siguiente figura tenemos un bloque de 15 kg, que se suelta desde el punto A. la pista no ofrece fricción excepto en la parte BC, de 10 m de longitud. El bloque se mueve hacia abajo por la pista, golpea un resorte de constante elástica* $[K = 3\,550\,\mathrm{N/m}]$ *y los comprime 0,50 m, a partir de su posición de equilibrio, antes de quedar momentáneamente en reposo. Determinar el coeficiente de fricción cinético, entre la superficie BC y el bloque.*

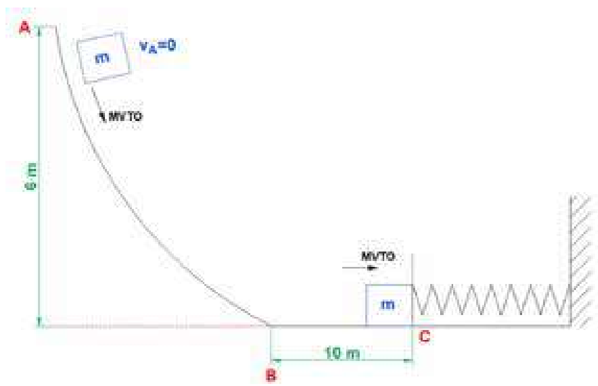


Figura 2.36. Desplazamiento descendente de una masa hasta impactar con un resorte.

Ejercicio 2.2.0.23. *Sobre un bloque e 5 kg que se mueve por el eje x, actúa una fuerza aislada que varia con la posición del bloque de acuerdo con la ecuación:* $F_{(x)} = 8x^2 - 3,50$*, en donde:*

x(m) y F(N). En x= 2 m el bloque se mueve hacia la derecha con 6 m/s. Determinar su velocidad en x=4 m.

Ejercicio 2.2.0.24. *Una función de energía potencia (EP) para una fuerza bidimensional es de la forma:* $EP = 6x^3y^2 - 9x$*, en donde x e y están en metros y EP en J. Determinar la fuerza que actúa en cualquier punto (x,y).*

Ejercicio 2.2.0.25. *Una partícula de masa m = 3 kg se suelta desde un punto A sobre la vereda sin fricción mostrada en la figura. Determinar:*

a. La velocidad de la partícula en los puntos B y C.

b. El trabajo neto realizado por la fuerza de gravedad al mover la partícula de A hacia C.

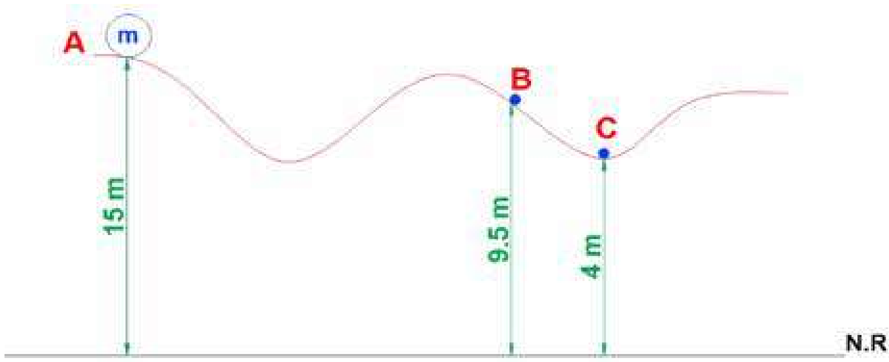


Figura 2.37. Desplazamiento descendente y ascendente sucesivo de una masa.

Ejercicio 2.2.0.26. *Una partícula de 600 gramos se suelta desde el reposo en el punto A a lo largo del diámetro horizontal en el interior de un tazón hemisférico sin fricción de radio R = 50 cm como se muestra en la figura. Determinar:*

a. La energía potencial gravitacional en el punto A respecto del punto B .

b. Su energía cinética en el punto B.

c. Su velocidad en el punto B.

d. Su energía cinética y potencial en el punto C.

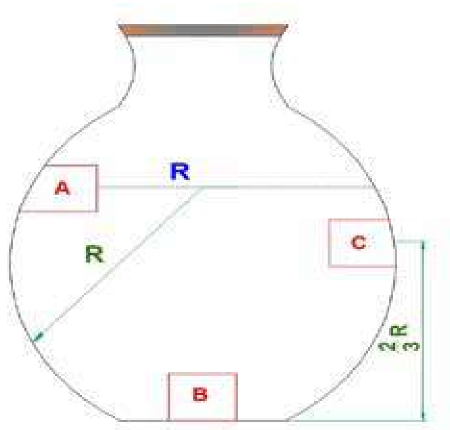


Figura 2.38. Desplazamiento de un partícula dentro de un tazón hemisférico.

Ejercicio 2.2.0.27. *Una pistola de juguete se compone de una esferita de plástico unida a un resorte como se muestra en la figura. El resorte se comprime 3 cm y la esferita de 200 gramos se mueve hacia arriba, elevándose una altura máxima de 80 cm, a partir que se separa del resorte, Determine la constante de fuerza (o elástica) del resorte.*

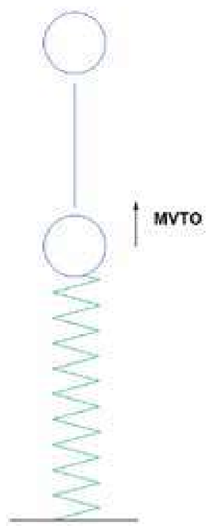


Figura 2.39. Mecanismo de resorte para el lanzamiento de una esferita.

Ejercicio 2.2.0.28. *Una partícula de masa "m" en "A" parte del reposo y de desliza hacia abajo por una pista curva sin fricción, como el de la figura. Abandona el tramo en forma horizontal y golpea el suelo, como se indica en el gráfico. Determine "h".*

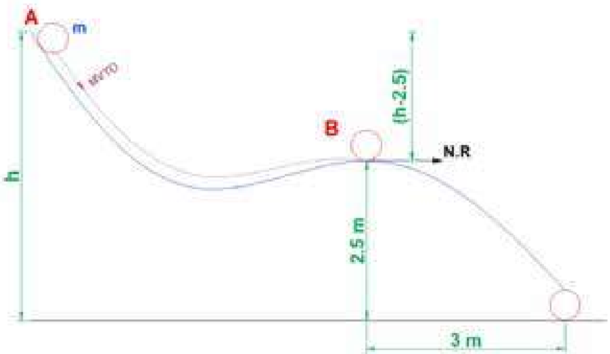


Figura 2.40. Deslizamiento de una masa hasta golpear el suelo de una pista.

Ejercicio 2.2.0.29. *Un bloque de 12 kg se mueve sobre una superficie horizontal rugosa y choca con un resorte, como se puede ver en la figura. La velocidad del bloque justo antes del choque es de 6 m/s conforme el bloque rebota hacia la izquierda con el resorte descomprimido, su velocidad cuando se separa del resorte es de 4 m/s. Si el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es de 0,30. Determinar:*

a. *La energía perdida debido a la fricción mientras el bloque está en contacto con el resorte.*

b. *La distancia máxima que se comprime el resorte.*

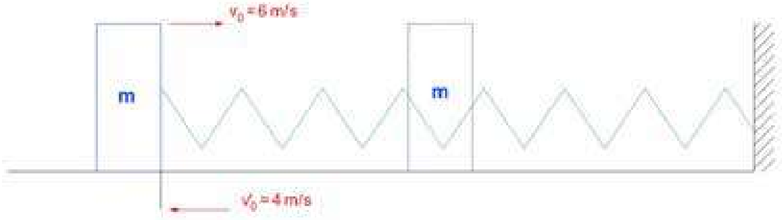


Figura 2.41. Desplazamiento de un bloque sobre una superficie rugosa que choca con un resorte.

Ejercicio 2.2.0.30. *Un bloque de 4 kg situado sobre una pendiente de 60° rugosa se conecta a un resorte de masa despreciable que tiene una constante de fuerza de 600 N/m, como se muestra en la figura. El bloque se suelta desde el reposo cuando el resorte no esta deformado y la polea no presenta fricción. El bloque se mueve 25 cm hacia abajo de la pendiente antes de detenerse. Determinar el coeficiente de fricción cinético entre el bloque y la pendiente.*

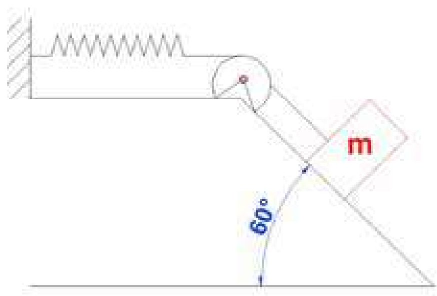


Figura 2.42. Bloque conectado a un resorte por medio de una polea.

Ejercicio 2.2.0.31. *Jane, cuya masa es de 60 kg, necesita columpiarse encima de un río (De ancho x) lleno de cocodrilos para salvar a Tarzán del peligro. Pero debe hacerlo con una fuerza horizontal constante del viento F sobre la liana de longitud L y que forma inicialmente un ángulo θ con la vertical como se ve en la figura, si se considera los siguientes valores: x = 80 m, F = 150N, L = 15m y $\theta = 60°$. Determinar:*

a. *¿Con qué velocidad mínima debe iniciar Jane (J) su movimiento para llegar a otro lado?*

b. *Una vez que se completa el rescate, Tarzán (T) y Jane deben columpiarse de regreso sobre el río. ¿Con que velocidad mínima deben empezar su movimiento? Suponiendo que la masa de Tarzán es de 75 kg [3], [8], [7].*

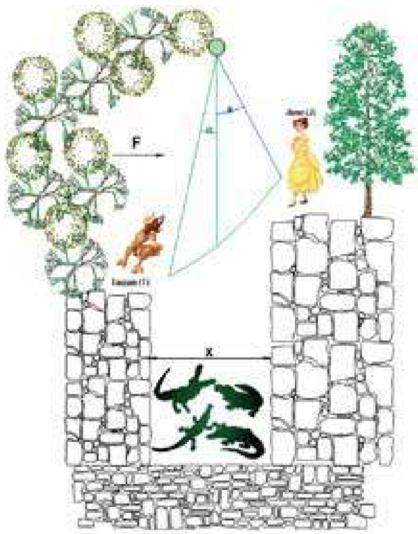


Figura 2.43. Tarzán y Jane en una situación de peligro.

Capítulo III

IMPULSO Y CANTIDAD DEL MOVIMIENTO LINEAL

3.1. Definiciones generales

Consideremos un experimento sobre una superficie lisa (sin fricción) donde: (a) un cuerpo de masa m_A que se desliza y está alcanzando a otro cuerpo de masa m_B, (b) , ambos cuerpos colisionan & (C) ambos cuerpos se han separado y el cuerpo B se mueve por delante del cuerpo A. Como se indica en la Fig. 3.1

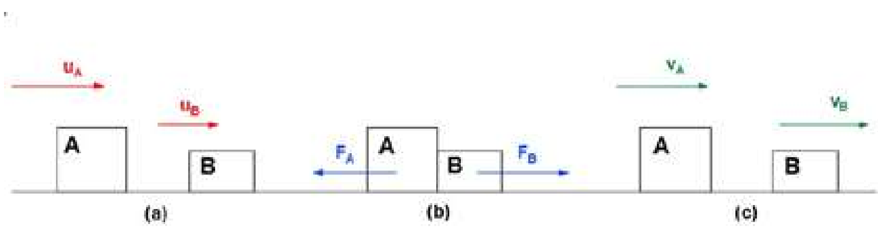


Figura 3.1. Definición de impulso y cantidad de movimiento lineal

Durante la colisión (choque) en la parte (b) de la Fig. 3.1, existe una interacción entre el cuerpo A y B, lo que se manifiesta porque el cuerpo A ejerce sobre el B una fuerza F_B, y el cuerpo B ejerce sobre el A una fuerza F_A en sentido opuesto (por acción y reacción) y en virtud de la tercera ley de Newton son de igual modulo y de sentido opuesto: $F_A = -F_B$.

Estas fuerzas no son constantes, sino que son variables y momentáneas. Ambas son nulas naturalmente antes del contacto (instante t_1) y pequeñas en el primer instante, después las dos aumentan hasta un valor máximo y por último se anulan cuando los cuerpos se separan en el instante t_2 . Una fuerza que varía con el tiempo del modo expuesto recibe el nombre de “Presión de Choque”.

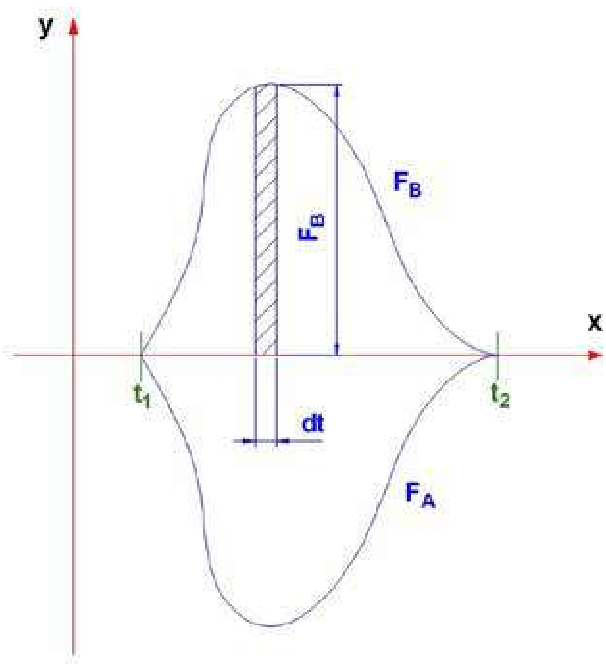


Figura 3.2. Definición de impulso

La Fig. 3.2, muestra la gráfica de las fuerzas F_A y F_B . En función del tiempo, habiéndose representado hacia arriba la fuerza positiva F_B, y hacia abajo la negativa F_A. Ambas fuerzas comienzan en el mismo instante t_1 de contacto, alcanzan un valor máximo y terminan en el instante t_2 de separación. Los módulos de las dos fuerzas son iguales, en todo instante.

El efecto de estas fuerzas es comunicar a cada cuerpo una aceleración rápidamente variable. En virtud de la segunda ley de Newton, se tiene que, en todo instante, durante la colisión:

$$F_A = m_A \cdot \frac{dv_A}{dt} \Rightarrow F \cdot dt = m_A \cdot dv_A$$
$$F_B = m_B \cdot \frac{dv_B}{dt} \Rightarrow F_B \cdot dt = m_B \cdot dv_B$$

Estas relaciones han de cumplirse para todos los intervalos infinitesimales de tiempo, desde el comienzo del contacto en t_1 hasta el final de este en t_2. Por tanto:

$$\int_{t_1}^{t_2} F_A dt = \int_{u_A}^{v_A} m_A dv_A \ \ ; \ \ \int_{t_1}^{t_2} F_B dt = \int_{u_B}^{v_B} m_B dv_B$$

Puesto que m_A y m_B son constantes.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{I_A} = \int_{t_1}^{t_2} F_A \cdot dt = m_A v_A - m_A u_A \\ \overrightarrow{I_B} = \int_{t_1}^{t_2} F_B \cdot dt = m_B v_B - m_B u_B \end{array}\right\} \quad (3.1)$$

Es útil dar denominaciones a las magnitudes que figuran en las ecuaciones que acabamos de deducir.

La integral de una fuerza durante el intervalo de tiempo en que el que actúa se denomina: "Impulsión de la Fuerza" $\overrightarrow{I_F}$.

$$I_F = \text{Impulsion de una fuerza} = \int_{t_1}^{t_2} F dt \quad (3.2)$$

Así tenemos que la impulsión de la fuerza F_B en el intervalo de tiempo dt está representada en la Fig. 3.2 por el área del rectángulo rayado y la impulsión durante la colisión (choque) está representado por el área total comprendida entre la gráfica de F_B y el eje de los tiempos. Análogamente, la impulsión de la fuerza F_A .

En el caso especial de una fuerza constante F, el área, simplemente:

$$F\,(t_2 - t_1)$$

Impulsión de una fuerza constante:

$$F\,(t_2 - t_1) \quad (3.3)$$

Unidades del impulso en el S.I: N.S.

Sistema Técnico: kgF. S

3.1.1. Cantidad de movimiento lineal o momentum lineal ($\overrightarrow{\mathrm{P}}$)

Al producto de la masa por la velocidad lineal se le denomina: cantidad de movimiento lineal o momentum lineal ($\overrightarrow{\mathrm{P}}$)

$$\overrightarrow{\mathrm{P}} = m\overrightarrow{v} \tag{3.4}$$

Unidad en el SI: $kg\frac{m}{s} = kg \cdot \frac{m}{s}\left(\frac{s}{s}\right) = N \cdot S$

La unidad de “Impulso” en cualquier sistema es equivalente a la unidad de cantidad de movimiento lineal.

A diferencia de la energía y el trabajo, que son magnitudes escalares, la cantidad de movimiento lineal ($\overrightarrow{\mathrm{P}}$) y e impulso de una fuerza $\overrightarrow{I_F}$ son magnitudes vectoriales. El vector “cantidad de movimiento”, de un cuerpo móvil tiene la misma dirección y sentido del vector “velocidad”. La dirección y sentido del vector “impulso” es la misma que de la “fuerza” que produce la impulsión.

La ecuación 3.1 establece por lo tanto, que el impulso de una fuerza que actúa sobre cualquier cuerpo es igual a la variación de la cantidad de movimiento de este. Así:

Impulso de una fuerza = Varaición de cantidad de movimiento

$$\overrightarrow{I} = \Delta\overrightarrow{\mathrm{P}} \tag{3.5}$$

3.2. Leyes para aplicarse en las colisiones (o choques)

3.2.1. Ley de la conservación de la cantidad de movimiento

Para las colisiones, en donde actúan únicamente fuerzas de acción y de reacción y no fuerzas externas, demostraremos que se cumple "la conservación de la cantidad de movimiento".
Consideremos el gráfico de la Fig. 2.2, puesto que, por la tercera ley de Newton, las fuerzas "F_A" y "F_B" son iguales en modulo en todo instante, las áreas comprendidas entre las gráficas de la Fig. 2.6 y el eje o son iguales, pero una positiva y la otra negativa. Por consiguiente:
Impulsión de F_A = - impulsión de F_B , y por tanto de acuerdo con la ecuación 2.1 tenemos:

$$m_A u_A - m_A u_A = -\left(m_B v_B - m_B u_B\right) \text{ o sea:}$$

$$m_A u_A + m_B u_B = m_A v_A + m_B v_B \tag{3.6}$$

El primer miembro de la ecuación 2.6 es la cantidad de movimiento total del sistema antes del choque, y el segundo miembro la cantidad de movimiento total después del choque.
Hemos llegado, por consiguiente, al resultado en extremo importante, de: "Que la cantidad de movimiento total de los cuerpos que chocan no se modifica durante el choque" este hecho se denomina: "Principio de conservación de la cantidad de movimiento". Y constituye una de las leyes más importantes de la mecánica.
Obsérvese que resulta super flujo, el conocimiento detallado de cómo varían las fuerzas F_A y F_B en cada instante. Las impulsiones de las fuerzas son necesariamente iguales, pero de sentidos opuestos, y producen, por tanto, variaciones iguales y opuestas de la cantidad de movimiento, el cambio total es por consiguiente nulo.
Un enunciado más general de la "Ley de la conservación de la cantidad de movimiento" y que no queda restringida al choque de dos cuerpos, es el siguiente:
"La cantidad de movimiento total de un sistema solo puede modificarse por fuerzas externas que actúen sobre el mismo".
Como las fuerzas F_A y F_B son de acción y reacción (interiores), iguales y opuestas y actúan durante tiempos iguales, producen variaciones de las cantidades de movimiento, iguales y opuestas

y se compensan entre sí, y se puede manifestar en conclusión que:

“La cantidad de movimiento de un sistema aislado es constante en módulo, dirección y sentido”.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{\mathrm{P}} = \text{constante} \\ \overrightarrow{\mathrm{P}}\ \text{antes}_{CHOQUE} = \overrightarrow{\mathrm{P}}\ \text{despues}_{CHOQUE}\end{array}\right\} \qquad (2.6)\ \text{a}$$

Ahora los vectores pueden estar en una sola dirección (choques frontales), o en un plano, o en el espacio, entonces, la ecuación general anterior seria expresada también:

$$\overrightarrow{\mathrm{P}}\ \text{antes}_{CHOQUE} = \overrightarrow{\mathrm{P}}\ \text{despues}_{CHOQUE}$$

$$\sum = \text{sumatoria vectorial}$$

$$\left(\mathrm{P}x\,\overrightarrow{i} + \mathrm{P}y\,\overrightarrow{J} + \mathrm{P}z\overrightarrow{K}\right)_{antes} = \left(\mathrm{P}x\,\overrightarrow{i} + \mathrm{P}y\,\overrightarrow{J} + \mathrm{P}z\overrightarrow{K}\right)_{despues}$$

$$\mathrm{P}x = \sum \mathrm{P}x \ ; \ \ \mathrm{P}y = \sum \mathrm{P}y \ ; \ \ \mathrm{P}z = \sum \mathrm{P}z$$

Estas sumatorias si son algebraicas. Por lo tantos las ecuaciones también se pueden expresar así:

$$\sum \mathrm{P}x_{antes} = \sum \mathrm{P}x_{despues}; \quad \sum \mathrm{P}y_{antes} = \sum \mathrm{P}y_{despues} \ \ ; \ \ \sum \mathrm{P}z_{antes} = \sum \mathrm{P}z_{despues}$$

Siendo sumatorias algebraicas en el mismo sentido para cada lado de las ecuaciones.

“Segunda ley de Newton en función de la cantidad de movimiento”

La segunda ley de Newton para la mecánica establece:

$$\overrightarrow{F_{ext}} = m\overrightarrow{a} = m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{d\left(m\overrightarrow{v}\right)}{dt} = \frac{d\overrightarrow{p}}{dt}$$

$$\overrightarrow{F_{ext}} = \frac{d\overrightarrow{p}}{dt} \qquad (3.7)$$

La ecuación 3.7 establece que la fuerza $\overrightarrow{F_{ext}}$ externa es igual a la variación de la cantidad de movimiento con respecto al tiempo, y en el límite es igual a la derivada de la cantidad de movimiento con respecto al tiempo ($d\overrightarrow{p}/dt$).

En el caso de las colisiones (choques) solo actúan fuerzas internas de acción y reacción y las fuerzas externas no existen, o son nulas, o sea:

$$\overrightarrow{F_{ext}} = 0 \text{ en este caso}$$

$$\frac{d\overrightarrow{p}}{dt} = 0 \text{ y, por lo tanto}$$

$$\overrightarrow{p} = \text{constante}$$

Lo que significa que en estas condiciones existe "conservación de la cantidad de movimiento"

3.2.2. Coeficiente de restitución (e)

Para definir una relación general que se pueda utilizar en las colisiones partimos de un choque ideal, en donde inicialmente se puede considerar que el choque es perfectamente elástico, para el cual se estima de que existe conservación de la energía cinética (EC) por ende:

$$EC_{antes\ choque} = EC_{despues\ choque}$$

Para la colisión de la Fig. 2.1, tenemos:

$$\tfrac{1}{2}m_A u_A^2 + \tfrac{1}{2}m_B u_B^2 = \tfrac{1}{2}m_A v_A^2 + \tfrac{1}{2}m_B v_B^2$$

$$\tfrac{1}{2}m_A\left(u_A^2 - v_A^2\right) = \tfrac{1}{2}m_B\left(v_B^2 - u_B^2\right) \Rightarrow \text{Constante de la energía.}$$

Ahora utilizando la ley de la conservación de la cantidad de movimiento tenemos:

$$m_A u_A + m_B u_B = m_A v_A + m_B v_B \text{ o sea:}$$

$$m_A\left(u_A - v_A\right) = m_B\left(v_B - u_B\right)$$

Dividiendo para esta expresión la conservación de la energía, la misma que factoramos, a la vez, (diferencia de cuadrados) tenemos:

$$\frac{\frac{1}{2}m_A(u_A-v_A)(u_A+v_A)}{m_A(u_A-v_A)} = \frac{\frac{1}{2}m_B(u_B-v_B)(u_B+v_B)}{m_B(u_B-v_B)}$$

$u_A + v_A = u_B + v_B$ o también:

$$u_A - u_B = -\left(v_A - v_B\right) \Rightarrow u_{A/B} = -v_{A/B} \tag{3.8}$$

En la relación que hemos obtenido, el primer miembro de la ecuación $(u_A - u_B)$ es la velocidad relativa de A respecto a B antes del choque, por tanto, en un choque perfectamente elástico la velocidad relativa cambia de sentido, pero conserva su modulo.
En cambio, para los demás choques, la velocidad relativa después del choque $\left(v_A - v_B = v_{A/B}\right)$ es siempre menor que antes del mismo $\left(u_A - u_B = u_{A/B}\right)$.
Se define, el coeficiente de restitución "e" para un par de cuerpos que chocan, como la razón o cociente, cambiada de signo de la velocidad relativa después del choque a la velocidad relativa antes del choque:

$$\mathrm{e} = -\frac{(v_A - v_B)}{(u_A - u_B)} \tag{3.9}$$

Según lo que acabamos de demostrar. El coeficiente de restitución es la unidad, cuando los dos cuerpos que chocan son perfectamente elásticos, es decir cuando se cumple la conservación de la energía y por su puesto la conservación de la cantidad de movimiento se obtuvo la ecuación (3.8) que expresa que:

$$-\frac{v_{A/B}}{u_{A/B}} = 1\,(e)$$

3.2.3. Clasificación de choques

Los choques se clasifican en:

1. Choques elásticos (chocan y se separan).
2. Choques semi- elásticos.
3. Choques inelásticos (chocan y no se separan).
4. Choques semi- inelásticos.

En resumen [6]:

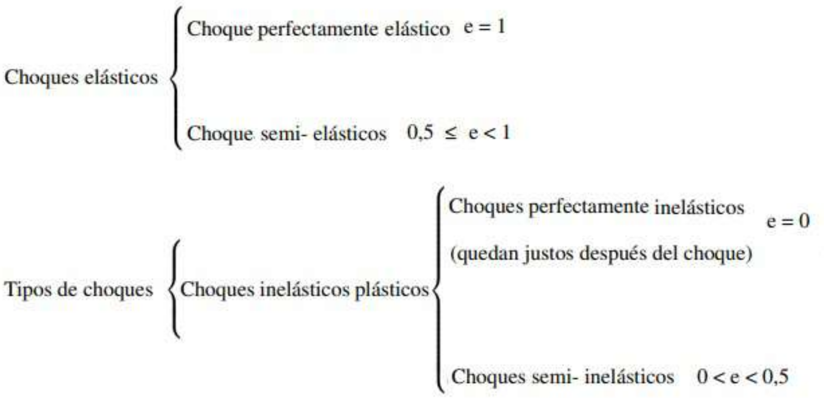


Figura 3.3. Resumen de los tipos de choque.

3.3. Centro de Masa-Gravedad

Cada partícula material de un cuerpo es atraída por la tierra, y la fuerza única que llamamos peso del cuerpo es el resultante de todas estas fuerzas de atracción. La dirección y sentido de la fuerza es hacia el centro de la tierra. Pero la distancia hasta el centro de la tierra es tan grande que para todos los fines prácticos las fuerzas pueden considerarse paralelas dirigidas verticalmente entre sí, en la superficie terrestre. Por consiguiente, el peso de un cuerpo es la resultante de un gran número de fuerzas paralelas.

La Fig. 3.4 (a) representa un objeto plano situado en el plan X-Y, siendo el eje y vertical. Supongamos el cuerpo subdividido en un gran número de pequeñas partículas de pesos W_1, W_2, W_3, entre otros., y sean $(x_1, y_1)\,;(x_2, y_2)\,;(x_3, y_3)$ entre otros. Las coordenadas de estas partículas.

El peso total W del objeto es:

$$W = W_1 + W_2 + \ldots\ldots\ldots + W_i = \sum W \qquad (3.10)$$

Las coordenadas $\overrightarrow{x}$ de la línea de acción de W es:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{X} &= \frac{W_i X_1 + W_2 X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots}{W_1 + W_2 + \ldots\ldots\ldots} \\ &= \frac{\sum WX}{\sum W}\end{aligned} \qquad (3.11)$$

Supongamos ahora que el objeto y los ejes de referencia han girado 90º en el sentido de las agujas del reloj, o lo que es lo mismo consideremos que las fuerzas gravitatorias han girado 90º en sentido contrario al sentido de las agujas del reloj, como en la Fig. 3.4 (b), el peso total W permanece invariable, y la coordenada de su línea de acción es:

$$\overrightarrow{Y} = \frac{W_i Y_1 + W_2 Y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots}{W_1 + W_2 + \ldots\ldots\ldots} = \frac{\sum WY}{\sum W} =$$

$$\overrightarrow{Y} = \frac{\sum WY}{W} \qquad (3.12)$$

El punto de intersección de las líneas de acción de W en ambas partes de la figura tiene las coordenadas x e y , y se denominan "Centro de Gravedad", del objeto, considerando cualquier orientación arbitraria del objeto, se puede demostrar que la línea de acción de W pasa siempre por el centro de gravedad (c.g).

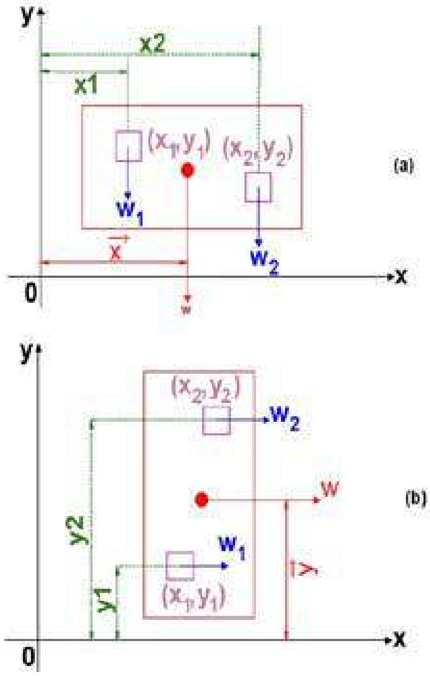


Figura 3.4. Definición de centros de masa y gravedad. a) Centro de masa cuando el objeto esta horizontalmente. b) Centro de masa cuando el objeto esta verticalmente.

Son útiles frecuentemente consideraciones de simetría para encontrar la posición del c.g de cuerpos homogéneos. Así los centros de gravedad de una esfera, un cubo, un disco circular, o una placa rectangular homogéneos, coinciden con sus centros geométricos.

Los de un cilindro o un cono rectos de revolución se encuentran sobre sus ejes de simetría, y así sucesivamente.

3.3.1. Centros de masa (C.M)

Si utilizamos la definición: W= m.g, en donde:

- W = peso (N = Newton)
- m = masa (kg = Kilogramo)

- g = aceleración de la gravedad m/s^2

De las ecuaciones. (3.10), (3.11) y (3.12) obtendremos las coordenadas del centro de masa (C.M.)

$$Mg = m_1 g + m_2 g + \ldots\ldots\ldots\ldots + m_i g = \left(\sum_{i=1}^{n} M\right) g$$

$$M = m_1 + m_2 + \ldots\ldots\ldots + m_i = \sum_{i=1}^{n} M_i \tag{3.13}$$

$$X_{CM} = \frac{1}{M}\left(m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots\ldots + m_i x_i\right) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \tag{3.14}$$

$$Y_{CM} = \frac{1}{M}\left(m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots\ldots + m_i y_i\right) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i \tag{3.15}$$

$$Z_{CM} = \frac{1}{M}\left(m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots\ldots + m_i z_i\right) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i \tag{3.16}$$

En la notación vectorial más completa, estas últimas tres ecuaciones, pueden escribirse como una sola expresión que define la posición (r) del centro de masa (C.M).

$$r_{CM} = \frac{1}{M}\left(m_1 \overrightarrow{r}_1 + m_2 \overrightarrow{r}_2 + \ldots\ldots\ldots + m_i \overrightarrow{r}_i\right) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{r}_i \tag{3.17}$$

Usando la derivada de esta expresión hallamos la velocidad del centro de masa.

$$\overrightarrow{V}_{CM} = \frac{d\overrightarrow{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\left(m_1 \frac{d\overrightarrow{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\overrightarrow{r}_2}{dt} + \ldots\ldots + m_i \frac{d\overrightarrow{r}_i}{dt}\right)$$

$$\overrightarrow{V}_{CM} = \frac{1}{M}\left(m_1 \overrightarrow{v}_1 + m_2 \overrightarrow{v}_2 + \ldots\ldots + m_i \overrightarrow{v}_i\right) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{v}_i \tag{3.18}$$

Diferenciando una vez más, la ecuación anterior, hallamos la aceleración del centro de masa (C.M)

$$\overrightarrow{a}_{CM} = \frac{d\overrightarrow{v}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\left(m_1 \overrightarrow{a}_1 + m_2 \overrightarrow{a}_2 + \ldots\ldots + m_i \overrightarrow{a}_i\right) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{a}_i \tag{3.19}$$

La ecuación 3.19 la podemos escribir así:

$$Ma_{CM} = m_1\overrightarrow{a}_1 + m_2\overrightarrow{a}_2 + \ldots\ldots + m_i\overrightarrow{a}_i$$

$$Ma_{CM} = F_1 + F_2 + \ldots + F_i \tag{3.20}$$

Donde el último resultado se deduce de la aplicación de la segunda Ley de Newton;

$$F_i = m_i a_i$$

A cada partícula individual.

La fuerza total que actúa sobre un sistema de partículas es, entonces igual a la masa total del sistema (M) multiplicada por la aceleración del centro de masa $(\overrightarrow{a}_{CM})$.

Como en las colisiones (choques) de un sistema de partículas, las fuerzas internas (de acción y reacción) se cancelan por la tercera ley de Newton, todo lo que queda en la ecuación 3.20.

Es el total de todas las fuerzas externas, y por lo tanto la ecuación expresa que:

$$Fext = M \cdot a_{CM} \tag{3.21}$$

Se puede resumir este resultado de la siguiente manera:

El movimiento de translación total de un sistema de partículas puede ser analizado: "Usando las leyes de Newton" como si toda la masa estuviera concentrada en el centro de masa y la fuerza externa total estuviera aplicada en ese punto.

El cuerpo puede ser de movimiento complicado, pero el C.M. se moverá de acuerdo con la ecuación 3.21.

3.3.2. Colisiones (choques) unidimensionales en el sistema de centro de masas.

Algunos aspectos muy significativos de la dinámica de las colisiones pueden comprenderse mejor, observando lo que sucede en un sistema de coordenadas fijo con respecto al centro de masas de los cuerpos que chocan. Puesto que durante los choques no actúan fuerzas externas, la

$\overrightarrow{a}_{CM}$ es cero, por ende, el movimiento del centro de masa no cambia antes y después de ello.

Si la posición de la masa m_1 en algún instante t antes de la colisión fuera x_1 , y la de la masa m_2 en el mismo instante fuese x_2 , entonces, de acuerdo con la definición de centro de masa:

$$(m_1 + m_2)\overrightarrow{x} = m_1 x_1 + m_2 x_2 \tag{3.22}$$

En donde x es la coordenada del C.M. de los dos objetos derivando ambos miembros de esta ecuación con respecto al tiempo, se tiene que:

$$(m_1 + m_2)\frac{d\overrightarrow{x}}{dt} = m_1\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt} + m_2\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt} \text{ o bien;}$$

$$(m_1 + m_2)\overrightarrow{u} = m_1 u_1 + m_2 u_2 \tag{3.23}$$

En donde $\overrightarrow{u}$ es la velocidad del C.M. antes del choque.
De lo anterior es claro que.

$$\overrightarrow{u} = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2} \tag{3.24}$$

Después del choque las velocidades de los dos cuerpos son: v_1 y v_2 . Por el mismo razonamiento que llevo a la ecuación 3.24, la velocidad del C.M. después de la colisión será:

$$\overrightarrow{v} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \tag{3.25}$$

La velocidad del centro de masa (C.M.) del sistema en una colisión es precisamente la misma antes y después de la colisión.

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \tag{3.26}$$

3.3.3. Colisiones en dos y tres dimensiones

Se centrará la atención en casos de choques en los que intervienen dos cuerpos y en los que las condiciones del problema y la simetría de los cuerpos garanticen en todo momento la limitación del movimiento, en dos dimensiones, en especial el plano xy. Estos tipos de problemas de colisiones bidimensionales ilustran la manera más general la conservación de la cantidad de movimiento, considerada como vector.

Entonces, para que se conserve la cantidad de movimiento vectorial del sistema en una colisión de dos cuerpos, tendremos:

$$m_1\overrightarrow{u_1} + m_2\overrightarrow{u_2} = m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} \tag{3.27}$$

En donde: $\overrightarrow{u_1}$ y $\overrightarrow{u_2}$ son las velocidades iniciales y $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ las velocidades finales.

Esto también puede expresarse por un sistema de tres ecuaciones que expresen el hecho de que, si se conserva la cantidad de movimiento vectorial, cada componente debe conservarse también.

$$\begin{aligned} m_1u_1x + m_2u_2x &= m_1v_1x + m_2v_2x \\ m_1u_1y + m_2u_2y &= m_1v_1y + m_2v_2y \\ m_1u_1z + m_2u_2z &= m_1v_1z + m_2v_2z \end{aligned} \tag{3.28}$$

Si el movimiento se limita al plano xy, las componentes en z son nulas. Ejemplo: choque de bolas de billar, sobre la superficie de una mesa horizontal.

De ordinario, si se conocen las velocidades iniciales y se buscan las finales. Habrá entonces cuatro incógnitas (v_1x, v_1y, v_2x, v_2y) en el caso de una colisión bidimensional, la conservación de la cantidad de movimiento proporcionará dos ecuaciones y otra ecuación obtendremos del concepto del coeficiente de restitución, en la cual: si el choque es perfectamente elástico (choque elástico): e=1, si el choque es perfectamente inelástico (choque inelástico): e = 0.

La energía cinética se puede expresar en función de la cantidad de movimiento (P) así: $E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv \cdot \frac{mv}{m} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{P}^2}{m}$ [3, 5]

$$E_C = \frac{\mathrm{P}^2}{2m} \tag{3.29}$$

Capítulo IV

EJERCICIOS PROPUESTOS Y RESUELTOS DE IMPULSO CANTIDAD DEL MOVIMIENTO LINEAL

4.1. Ejercicios resueltos

Ejercicio 4.1.0.1. *Una estudiante lanza una pelota sobre la vereda, se sabe que el impulso que la vereda provoca en la pelota es 2 Ns en un tiempo de 0,008 s. Calcular la fuerza promedio que la vereda provoca en la pelota.*

Datos:
$I = 2\ Ns$

$\Delta t = -1/800\ s$

$F = ?$

La fuerza se puede calcular medainte la fórmula $I = F \cdot \Delta t$, de dónde despejando la fuerza se tiene lo deseado:

$$\begin{aligned} F &= \frac{I}{\Delta t} \\ &= \frac{2}{\frac{1}{800}} \\ &= 1\ 600\ N \end{aligned}$$

Ejercicio 4.1.0.2. *Una pelota de masa 60 g se deja caer desde una altura de 2 m y rebota hasta una altura de 1,8 m ¿Cuál es el cambio en su cantidad de MVTO lineal durante el choque con el piso?*

Datos:
$hos = 2\,\mathrm{m}$

$m = 60\,\mathrm{g} = 0,060\,\mathrm{kg}$

$hso' = 1,8\,\mathrm{m}$

$\Delta\rho = ?$

$v_0 = 0$

$v_0{}' = 0$

Realizamos una figura para mayor comprensión

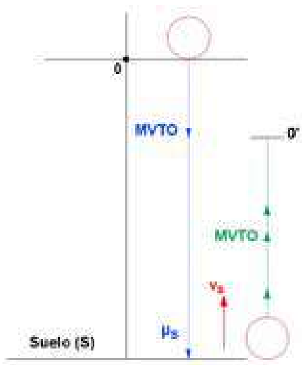


Figura 4.1. Diagrama de caída de una pelota.

A nivel del suelo se cumple que:

$$\Delta\rho = \rho_F - \rho_O$$
$$= mv_S - m\mu_S$$

Ahora, aplicando el teorema trabajo y energía entre O y S se tiene que

$$\mathrm{EM}_O = EM_S$$
$$m\,g\,hos = \frac{1}{2}m{\mu_S}^2$$

Despejando μ_s:

$$\begin{aligned}\mu_S &= \sqrt{2\,g\,hos}\\ &= \sqrt{2\,(9,8)\,(2)}\\ &= 6,26\ m/s\end{aligned}$$

Aplicado el teorema trabajo y energía entre S y O:

$$\begin{aligned}EM_S &= \mathrm{EM}_O{}'\\ \frac{1}{2}\,m\,v_S^2 &= m\,g\,hso'\end{aligned}$$

Despejando v_s se tiene:

$$\begin{aligned}v_S &= \sqrt{2\,(9,8)\,(1,8)}\\ &= 5,9397\ m/s\end{aligned}$$

Por último, aplicando lo obtenido en la ecuación del cambio en la cantidad de *MVTO* lineal se tiene lo deseado:

$$\begin{aligned}\Delta\rho &= 0,060\,(5,9397 - 6,261)\\ &= 0,0193\ kg\cdot m/s\end{aligned}$$

Ejercicio 4.1.0.3. *Un coche acelera y cambia su velocidad de 0 m/s a 5,2 m/s en un tiempo de 0,832 s cuando la luz del semáforo cambia a verde. Determinar el impulso y la fuerza que experimenta el conductor del coche si su masa es de 70 kg.*

Datos:

$\mu = 0\,\mathrm{m/s}$

$v = 5,20\,\mathrm{m/s}$

$\Delta t = 0,832\,\mathrm{s}$

$I = ?$

$F = ?$

$m = 70\,\mathrm{kg}$

Primero calculamos el impulso como sigue:

$$\begin{aligned} I &= \Delta\rho \\ &= m\,v - m\,\mu \\ &= 70\,(5,2) \\ &= 364\ kg \cdot m/s \\ &= 364\ Ns \end{aligned}$$

Ahora, para calcular la fuerza aplicamos la ecuación:

$$\begin{aligned} F &= \frac{I}{\Delta t} \\ &= \frac{364\ Ns}{0{,}832\ s} \\ &= 437,5\ N \end{aligned}$$

Ejercicio 4.1.0.4. *Una bola de acero de 3,0 kg golpea una pared con una velocidad de 10 m/s y un ángulo de 60° con la superficie. Rebota con igual velocidad y ángulo, como se muestra en la figura adjunta. Si la bola está en contacto por la pared durante 0,20 s, ¿cuál es la fuerza promedio ejercida por la pared sobre la bola?*

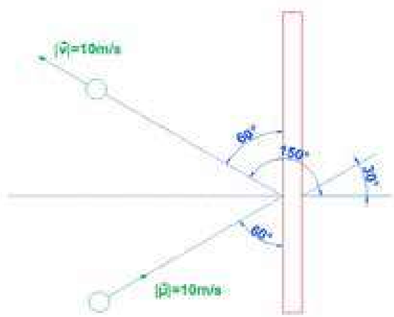


Figura 4.2. Choque de una bola de acero contra una pared.

Datos:

$m = 3\,\mathrm{kg}$

$\overrightarrow{\mu} = (10\,\mathrm{m/s}\,;\,30°) = \left(8,66\,\overrightarrow{i} + 5\,\overrightarrow{j}\right)\mathrm{m/s}$

$\overrightarrow{v} = (10\,\mathrm{m/s}\,;\,150°) = \left(-8,66\,\overrightarrow{i} - 5\,\overrightarrow{j}\right)\mathrm{m/s}$

$\Delta t = 0,20\,\mathrm{s}$

$\overrightarrow{F} = ?$

A partir de la ecuación $\overrightarrow{I} = \overrightarrow{F} \cdot \Delta t$, despejando la fuerza se obtiene:

$$\overrightarrow{F} = \frac{\overrightarrow{I}}{\Delta t},$$

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{I} &= \overrightarrow{\Delta\rho} \\
&= m\overrightarrow{v} - m\overrightarrow{\mu} \\
&= m\left(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{\mu}\right) \\
&= 3\left[-8,66\,\overrightarrow{i} + 5\,\overrightarrow{j} - 8,66\,\overrightarrow{i} - 5\,\overrightarrow{j}\right] \\
&= 51,96\;Ns
\end{aligned}$$

Reemplazando este valor en la ecuación de la fuerza se tiene que lo deseado:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F} &= \frac{\left(-51,96\,\overrightarrow{i}\right)\mathrm{Ns}}{0,20\,\mathrm{s}} \\
&= \left(-259,8\,\overrightarrow{i}\right)\;\mathrm{N}
\end{aligned}$$

Ejercicio 4.1.0.5. *Un hombre de 79,5 kg parado sobre un estanque congelado cercano a un muro sostiene una bola de 0,5 kg. Lanza la bola al muro con una velocidad de 10,0 m/s (en relación con el suelo) y atrapa la bola después de que está rebota en el muro.*

a. ¿A qué velocidad se mueve después de atrapar la bola? (Ignore el movimiento de proyectil de la bola y suponga que está no pierde energía en su choque con el muro)

b. ¿Cuántas veces tiene que seguir este proceso el hombre para que su velocidad llegue a 1,0 m/s respecto al suelo?
Resolución: realizamos un gráfico

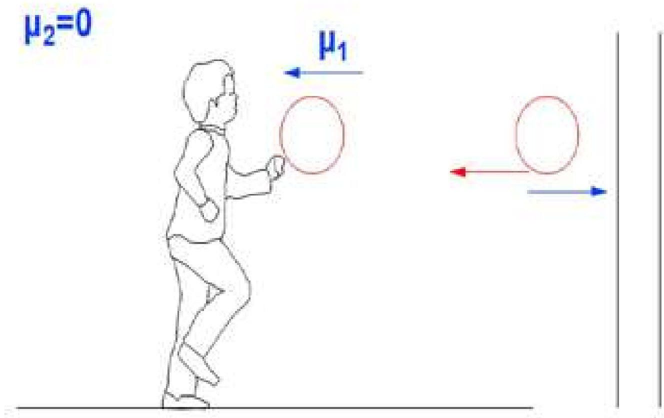


Figura 4.3. Lanzamiento de una bola contra una pared.

Datos:

$m_2 = 79,5\,\text{kg}$

$m_1 = 0,5\,\text{kg}$

$\overrightarrow{\mu_1} = \left(-10\,\overrightarrow{i}\right)\ \text{m/s}$

$\overrightarrow{\mu_2} = 0$

a) $\overrightarrow{v_2} = ?$

b) $\text{n} = ?$

Aplicamos la ley de la conservación de cantidad de MVTO en el choque inelástico:

$m_1 \cdot \overrightarrow{\mu_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{\mu_2} = (m_1 + m_2)\,\overrightarrow{v} =$

$\overrightarrow{v_2} = \left(-1\,\overrightarrow{i}\right)\,\mathrm{m/s}$

$\mathrm{v}_2 = v_1 = v$

$\overrightarrow{v} = \frac{0{,}5\left(-10\,\overrightarrow{i}\right)}{0{,}5+79{,}5} \Rightarrow \overrightarrow{v} = \left(-0{,}0625\,\overrightarrow{i}\right)\,\mathrm{m/s} \Rightarrow \mathrm{Resp\,(a)}$

$n\left(m_1\overrightarrow{\mu_1}\right) = (m_1 + m_2)\,\overrightarrow{v}$

$n = \frac{80(-1)}{0{,}5(-10)} \Rightarrow n = 16\,veces \Rightarrow \mathrm{Resp\,(b)}$

Ejercicio 4.1.0.6. ***Velocidad relativa*** *Una estudiante que tiene 45 kg de masa se encuentra ubicada sobre una tabla que tiene una masa de 150 kg que a su vez se aloja sobre una laguna congelada y en reposo, se sabe que la tabla puede deslizarse sobre el hielo considerándolo como una fricción nula. La estudiante camina sobre la tabla a una velocidad constante de 1,5 m/s con respecto a la tabla. Determinar:*

a. ¿Cuál es su velocidad de la estudiante con respecto a la superficie congelada?

b. ¿Cuál es la velocidad de la tabla con respecto a la superficie congelada?

Datos:

$m_T = 150\,\mathrm{kg}$

$m_M = 45\,\mathrm{kg}$

$^{\mu_T}/_h = 0 = {}^{\mu_M}/_h$

$^{v_M}/_T = 1{,}5\,\mathrm{m/s}$

a) $^{v_M}/_h = ?$

b) $^{v_T}/_h = ?$

Realizamos el diagrama como sigue:

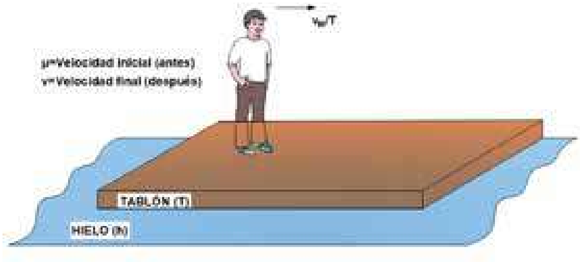


Figura 4.4. Persona sobre un tablón encima del hielo.

De donde se tiene que:

$$\begin{aligned} {}^{v_M}\!/_h &= v_M - v_h \\ &= {}^{v_M}\!/_T + {}^{v_T}\!/_h \\ &= v_M \cancel{- v_T + v_T} - v_h \end{aligned}$$

Aplicamos la conservación cantidad de MVTO:

$$\sum \rho_{antes} = \sum \rho_{despues}$$

$$m_M \cdot \cancel{\mu_M}/_h + m_T \cdot \cancel{\mu_T}/_h = m_M\, {}^{v_M}\!/_h + m_T\, {}^{v_T}\!/_h$$

$$0 = 45\, {}^{v_M}\!/_h + 150\, {}^{v_T}\!/_h$$

(Ec,2)

$dc\ (\text{Ec,1})\ {}^{v_T}\!/_h = {}^{v_M}\!/_h - {}^{v_M}\!/_T,\ reemplazamos\, en\ (\text{Ec,2}) \Rightarrow$

$0 = 45\, {}^{v_M}\!/_h + 150\left({}^{v_M}\!/_h - {}^{v_M}\!/_T\right)$

$195\, {}^{v_M}\!/_h = 150 {}^{v_M}\!/_T \Rightarrow {}^{v_M}\!/_h = \frac{150(1{,}5)}{195}$

${}^{v_M}\!/_h = 1,15\,\mathrm{m/s} \Rightarrow \text{Resp (a)}$

${}^{v_T}\!/_h = {}^{v_M}\!/_h - {}^{v_M}\!/_h = 1,15 - 1,5$

${}^{v_T}\!/_h = -0,35\,\mathrm{m/s} \Rightarrow\ Hacia\, la\, izquierda \Rightarrow \text{Resp (b)}$

Ejercicio 4.1.0.7. *Un hombre de 75 kg permanece en un bote de remos de 100 kg en reposo en agua tranquila. Mira hacia atrás del bote y lanza una roca de 5 kg en esa dirección fuera de la embarcación a una velocidad de 20 m/s. El bote se mueve hacia adelante y se detiene a 4,2 m de su posición original. Determinar:*

a. La velocidad del retroceso inicial del bote.

b. La pérdida de energía mecánica debido a la fuerza ejercida por el agua.

c. El coeficiente efectivo de fricción entre el bote y el agua.

Datos:

$m_H = 75\,\mathrm{kg}$

$m_B = 100\,\mathrm{kg}$

$m_r = 5\,\mathrm{kg}$

$\mu = 0\,(\mathrm{antes})$

$\overrightarrow{v_r} = \left(20\,\overrightarrow{i}\right)\,\mathrm{m/s}$

$x_{OA} = 4,2\,\mathrm{m}$

$v_A = 0$

a) $\overrightarrow{v} = ?$

b) $W_{FROZ} = ?$

c) $\mu_C = ?$

Realizamos un gráfico.

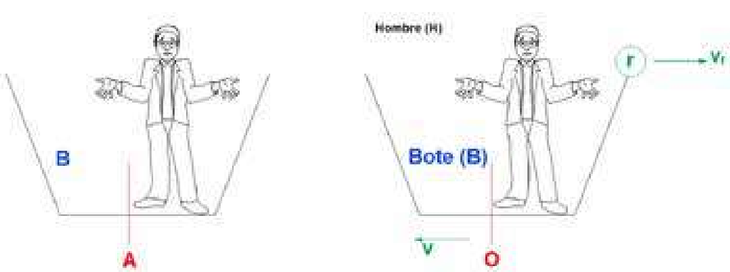


Figura 4.5. Diagrama de fuerzas en el bote.

Respuesta (a): Aplicamos Conservación cantidad de MVTO.

$$\sum \rho_{antes} = \sum \rho_{despues}$$
$$(m_H + m_B + m_r)\cancel{\overrightarrow{u}} = m_r \overrightarrow{v_r} + (m_H + m_B)\overrightarrow{v},$$

de donde, despejando v, se obtiene lo deseado:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v} &= -\frac{5\left(20\overrightarrow{i}\right)}{175} \\ &= \left(-0,57\overrightarrow{i}\right)\ m/s\end{aligned}$$

Respuesta (b): Aplicamos el teorema del trabajo y energía entre O y A del (Bote + hombre), obteniendo que $\mathrm{EM}_O = \cancel{\mathrm{EM}_A} + W_{FROZ\,OA}$, al despejar el trabajo se obtiene lo deseado:

$$\begin{aligned}W_{FROZ} &= \frac{1}{2}(m_H + m_B)v^2 \\ &= \frac{1}{2}(175)(0,57)^2 \\ &= 28,6\ J\end{aligned}$$

Respuesta (c): Recordando que:

$$\begin{aligned}W_{FROZ} &= Froz \cdot x_{OA} \\ &= \mu_c \cdot N \cdot x_{OA}.\end{aligned}$$

Nótese que en este caso la normal (N) es igual al peso $W = mg$, así el coeficiente efectivo de fricción será:

$$\begin{aligned}\mu_c &= \frac{W_{FROZ}}{mg \cdot x_{OA}} \\ &= \frac{28,6}{175(9,8)(4,2)} \\ &= 0,00397\end{aligned}$$

Ejercicio 4.1.0.8. *Una bola, con masa de 4 kg y velocidad de 1,2 m/s choca frontalmente con otra bola de masa de 5 kg moviéndose a 0,6 m/s en la misma dirección y sentido. Determinar:*

a. Las velocidades después del choque (suponiendo que es elástico)

b. El cambio en la cantidad de MVTO de cada bola.

Datos:

$m_1 = 4\,\text{kg}$

$\overrightarrow{\mu_1} = \left(1{,}2\,\overrightarrow{i}\right)\,\text{m/s}$

$m_2 = 5\,\text{kg}$

$\overrightarrow{\mu_2} = \left(0{,}6\,\overrightarrow{i}\right)\,\text{m/s}$

a) $\overrightarrow{v_1} = ?$

$v_2 = ?$

$Choque\ elastico\ \ (e = 1)$

b) $\Delta\overrightarrow{\rho_1} = ?$

$\Delta\overrightarrow{\rho_2} = ?$

Primeramente, realizaremos un gráfico

Figura 4.6. Choque entre dos bolas con la misma dirección y sentido.

Respuesta (a): Aplicamos la conservación cantidad de MVTO, obteniendo:

$$\sum \rho_{antes} = \sum \rho_{despues}$$

$$m_1\overrightarrow{\mu_1} + m_2\overrightarrow{\mu_2} = m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} \quad (eje\,x)$$

$$4\left(1,2\,\overrightarrow{i}\right) + 5\left(0,6\,\overrightarrow{i}\right) = 4\,\overrightarrow{v_1} + 5\,\overrightarrow{v_2}$$

despejando v_2 se obtiene:

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{7,8 - 4\,v_1}{5} \\ &= 1,56 - 0,8\,v_1 \end{aligned}$$

Ahora, si aplicamos el coeficiente de restitución (e = 1):

$$e = \frac{(v_1 - v_2)}{\mu_1 - \mu_2}$$

$$v_2 - v_1 = \mu_1 - \mu_2 = v_2 = 0,6 + \ v_1 \ \ \text{(Ec,2)}$$

$$\text{(Ec,1)} = \text{(Ec,2)} \ \ 0,6 + v_1 = 1,56 - 0,8v_1 \Rightarrow 1,8v_1 = 1,56 - 0,6 \Rightarrow$$

$$v_1 = 0,53\,\text{m/s} \ \ ; \ \ v_2 = 1,133\,\text{m/s}$$

Como sale positivo (el sentido es hacia la derecha)

$$\vec{v_1} = \left(0,53\,\vec{i}\right)\ m/s \qquad \& \qquad \vec{v_2} = \left(1,133\,\vec{i}\right)\ m/s$$

Respuesta (*b*): El cambio en la cantidad de MVTO de cada bola será:

$$\begin{aligned} \Delta\vec{\rho}_1 &= \vec{\rho}_{1\,despues} - \vec{\rho}_{1\,antes} \\ &= m_1\vec{v_1} - m_1\vec{\mu_1} \\ &= 4\left(0,53\,\vec{i} - 1,2\,\vec{i}\right) \\ &= \left(-2,67\,\vec{i}\right) kg\ m/s \end{aligned}$$

Por último,

$$\begin{aligned} \Delta\vec{\rho}_2 &= \vec{\rho}_{2\,despues} - \vec{\rho}_{2\,antes} \\ &= m_2\left(\vec{v_2} - \vec{\mu_2}\right) \\ &= 5\left(1,133\,\vec{i} - 0,6\,\vec{i}\right) \\ &= \left(2,67\,\vec{i}\right) kg \cdot m/s \end{aligned}$$

Conclusión:

$$\Delta\vec{\rho}_1 = \Delta\vec{\rho}_2 \qquad \& \qquad \vec{I_1} = \vec{I_2}$$

Ejercicio 4.1.0.9. *Una bala de 10 g de masa es disparada horizontalmente hacia un bloque de madera de 1,20 kg suspendido como un péndulo de una cuerda ligera de 2,0 m de longitud cómo se ilustra en la figura adjunta. La bala penetra rápidamente en el bloque y al salir de él recorre una distancia despreciable horizontalmente y luego entra en un segundo bloque de 0,5 kg de masa que se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal. Se observa entonces que el péndulo se eleva a una altura máxima de 0,707 m. El segundo bloque con la bala incrustada desliza 0,24 m sobre el plano antes de detenerse. El coeficiente de rozamiento entre el segundo bloque y el plano sobre el que se desliza es de 0,20. Determinar:*

a. *La velocidad inicial de la bala*

b. *La velocidad de la bala al salir del péndulo*

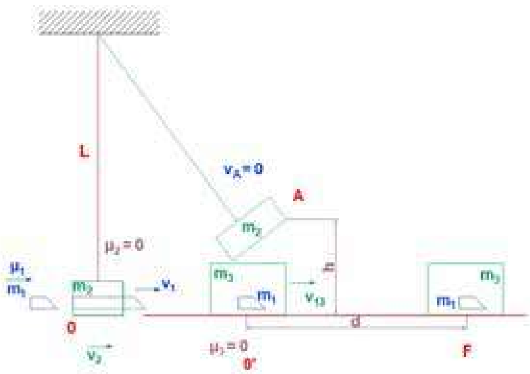


Figura 4.7. Desplazamiento de bloques a razón del impacto de una bala.

Datos:

$m_1 = 10\,\mathrm{g} = 0,01\,\mathrm{kg}$

$m_2 = 1,2\,\mathrm{kg}$

$m_3 = 0,5\,\mathrm{kg}$

$L = 2\,\mathrm{m}$

$h = 0,707\,\mathrm{m}$

$d = 0,24\,\mathrm{m}$

a) $\mu_1 = ?$

b) $v_1 = ?$

$\mu_c = 0,2$

a) Aplicamos Conservación de cantidad de MVTO entre 1 y 2

$\sum \overset{\to +}{\rho}_{antes} = \sum \overset{\to +}{\rho}_{despues}$

$m_1 \cdot \mu_1 + m_2 \cdot \cancel{\mu_2} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \Rightarrow$

$\mu_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1}$ (Ec,1)

Teorema del trabajo y la energía para m_2 entre O y A después del choque.

$\text{EM}_O = EM_A \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 {v_2}^2 = m_2 g \cdot h \Rightarrow v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$

$v_2 = \sqrt{2\,(9,8)\,(0,707)} = 3,72\,\text{m/s}$

Aplicamos Conservación de cantidad de MVTO entre 1 y 3 choque inelástico.

$\sum \overset{\to +}{\rho}_{antes} = \sum \overset{\to +}{\rho}_{despues} \therefore m_1 \cdot v_1 + m_3 \cdot v_3 = (m_1 + m_3)\, v_{13}$

$v_1 = \frac{(m_1 + m_3) \cdot v_{13}}{m_1}$ (Ec,2)

Teorema trabajo y energía entre O y F para 1 y 3 después del choque.

$\text{EM}_O{}' = EM_F + W_{FROZ\ O' \to F}$

$\frac{1}{2} (m_1 + m_3)\, v_{13}^2 = froz \cdot d$

$v_{13}^2 = \frac{(\mu_c \cdot N \cdot d) 2}{m_1 + m_3}$

La normal N es el peso de 1 y 3: $N = (m_1 + m_3)\, g$, luego:

$v_{13}^2 = \frac{\mu_c (m_1 + m_3) g \cdot d \cdot 2}{(m_1 + m_3)}$

$v_{13} = \sqrt{0,20\,(9,8)\,(0,24)\,(2)} \Rightarrow v_{13} = 0,97\,\text{m/s}$

$\text{en (Ec,2)}: \quad v_1 = \frac{(0{,}01 + 0{,}5)}{0{,}01}\,(0,97)$

$v_1 = 49,5\,\text{m/s} \Rightarrow \text{Resp (b)}$

$\text{en (Ec,1)}: \quad \mu_1 = \frac{0{,}01(49{,}5) + 1{,}2(3{,}72)}{0{,}01}$

$\mu_1 = 496\,\text{m/s} \Rightarrow \text{Resp (a)}$

Ejercicio 4.1.0.10. *Dos partículas de masas 2 kg y 3 kg se mueven con relación a un observador, con velocidades de 10 m/s a lo largo del eje x, y 8 m/s con un ángulo de 120° con el eje x, respectivamente.*

a. Expresar cada velocidad en forma vectorial (vectores base).

b. Hallar la velocidad del centro de masa (CM).

c. *Expresar la velocidad de cada partícula respecto al centro de masa (CM).*

d. *Hallar la cantidad de MVTO de cada partícula en el sistema centro de masa.*

e. *Hallar la velocidad relativa de las partículas.*

f. *Calcular la masa reducida del sistema.*

Datos:

$m_1 = 2\,\mathrm{kg}$

$m_2 = 3\,\mathrm{kg}$

$\overrightarrow{\mu_1} = (10\,\mathrm{m/s}\,;\, eje\, x\ (+))$

$\overrightarrow{\mu_2} = (8\,\mathrm{m/s}\,;\, 120°\, con\, x)$

$$\text{a)}\ \left.\begin{array}{r}\overrightarrow{\mu_1} =? \\ \overrightarrow{\mu_2} =?\end{array}\right\} vectorial\left(\overrightarrow{i}\ ,\ \overrightarrow{j}\right)$$

$\text{b)}\overrightarrow{\mu_{CM}} =?$

$\text{c)}\overrightarrow{\mu_1}/CM =?$

$\overrightarrow{\mu_2}/CM =?$

$\text{d)}\overrightarrow{\rho}_{1\,CM} =?$

$\overrightarrow{\rho}_{2\,CM} =?$

$\text{e)}\overrightarrow{\mu_1}/2 =?$

$\text{f)}\mathrm{Masa\,reducida} =?$

Graficamos los vectores:

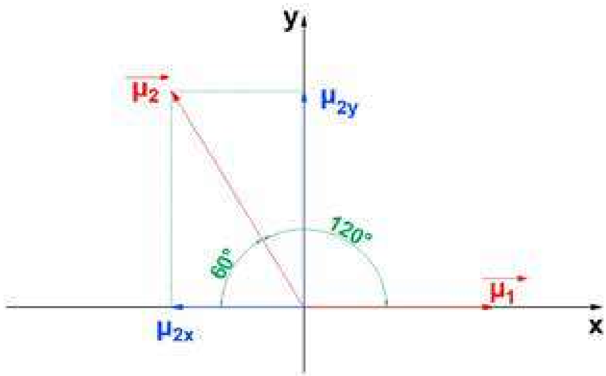


Figura 4.8. Movimiento de dos masas con relación a un observador.

Respuesta (a): La velocidad de la primera masa posee únicamente una componente en el eje x, la cual es $\overrightarrow{\mu_1} = \left(10\overrightarrow{i}\right)\ m/s$, por otro lado, la velocidad de la segunda componente está dada por:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mu_2} &= \mu_2 x\overrightarrow{i} + \mu_2 y\overrightarrow{j} \\
&= \mu_2 \cdot \cos(\theta) + \mu_2 \cdot \operatorname{sen}(\theta) \\
&= 8\cos(60°) + 8\operatorname{sen}(60°) \\
&= \left(-4\overrightarrow{i} - 6,93\overrightarrow{j}\right)\ m/s
\end{aligned}$$

Respuesta (b): La velocidad del centro de masa estará dada por:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mu}_{CM} &= \frac{m_1\overrightarrow{\mu_1} + m_2\overrightarrow{\mu_2}}{m_1 + m_2} \\
&= \frac{2\left(10\overrightarrow{i}\right) + 3\left(-4\overrightarrow{i} - 6,93\overrightarrow{j}\right)}{(2+3)} \\
&= \left(1,6\overrightarrow{i} + 4,16\overrightarrow{j}\right)\mathrm{m/s}
\end{aligned}$$

Respuesta (c): La velocidad de cada partícula respecto al centro de masa será:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mu_1}/_{CM} &= \overrightarrow{\mu_1} - \overrightarrow{\mu}_{CM} \\ &= 10\overrightarrow{i} - \left(1,6\overrightarrow{i} + 4,16\overrightarrow{j}\right) \\ &= \left(8,4\overrightarrow{i} - 4,16\overrightarrow{j}\right)\ m/s\end{aligned}$$

Respuesta (*d*): La cantidad de MVTO para la primera partícula, será:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\rho}_{1CM} &= m_1 \cdot \overrightarrow{\mu_1}/_{CM} \\ &= 2\left(8,4\overrightarrow{i} - 4,16\overrightarrow{j}\right) \\ &= \left(16,8\overrightarrow{i} - 8,32\overrightarrow{j}\right) kg \cdot m/s\end{aligned}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\rho}_{2CM} &= m_2 \cdot \overrightarrow{\mu_2}/_{CM} \\ &= 3\left(-5,6\overrightarrow{i} + 2,77\overrightarrow{j}\right) \Rightarrow \\ &= \left(-16,8\overrightarrow{i} + 8,31\overrightarrow{j}\right) kg \cdot m/s\end{aligned}$$

Respuesta (*e*): La velocidad relativa será:

$$\begin{aligned}\text{e) } \overrightarrow{\mu_1}/_2 &= \overrightarrow{\mu_1} - \overrightarrow{\mu_2} \\ &= \left(10\overrightarrow{i}\right) - \left(-4\overrightarrow{i} + 6,93\overrightarrow{j}\right) \\ &= \left(14\overrightarrow{i} - 6,93\overrightarrow{j}\right)\ m/s\end{aligned}$$

Respuesta (*f*): La masa reducida estará dada por:

$$\begin{aligned}m_{reducida} &= \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{2\,(3)}{(2+3)} \\ &= 1{,}2\ kg\end{aligned}$$

Ejercicio 4.1.0.11. *Considere un pista sin fricción como la mostrada en la Fig. 4.9 un bloque de masa 5 kg se suelta desde una altura de 5 m choca frontalmente con otro bloque de masa 10 kg, colocado en la base de la pista curva, inicialmente en reposo. Determinar, la altura máxima a la cual se eleva la masa de 5 kg después del choque. (considere choque elástico) y calcule también la velocidad de la masa dos después del choque.*

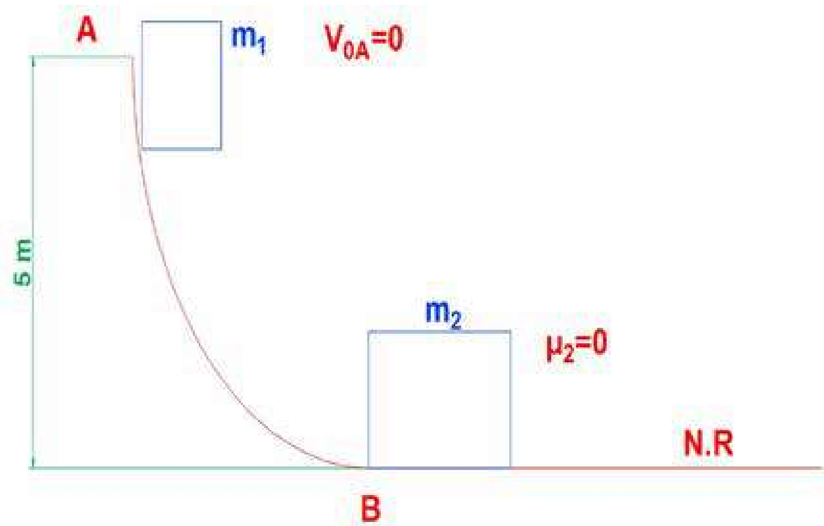


Figura 4.9. Caída de una masa por una rampa.

Datos:

$m_1 = 5\,\text{kg}$

$m_2 = 10\,\text{kg}$

$N \cdot R = Nivel\,de\,referencia$

$h_{BO} = h_{\text{máx }1} =?$

$v_2 =?$

$h_{AB} = 5\,\text{m}$

Realizamos un nuevo gráfico (en el choque) Fig. (b).

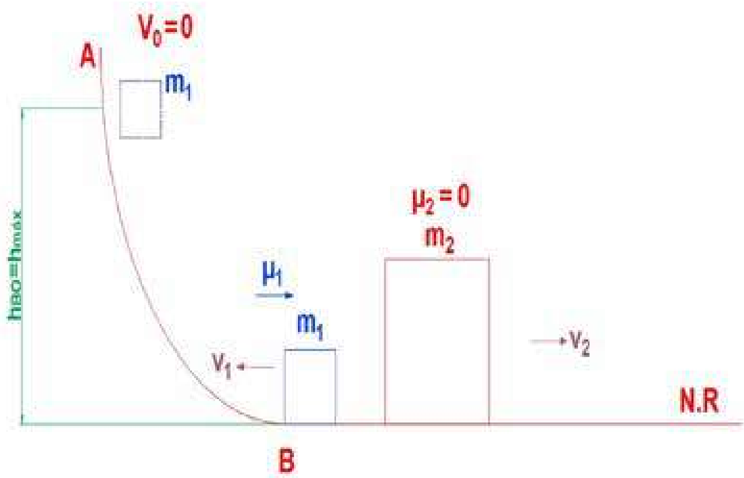


Figura 4.10. Choque de dos masas luego de que una descendiera por una rampa.

Aplicamos el teorema del trabajo y energía entre "B" y "O" después del choque elástico para el bloque uno:

Sin fricción.

Resolución: Realizamos un nuevo gráfico (En el choque) Fig. 4.10

Aplicamos el teorema del trabajo y energía entre B y O, después del choque elástico para el bloque uno:

$EM_B = \mathrm{EM}_O$

$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = m_1\, g \cdot h_{\text{máx } 1}$

$h_{\text{máx } 1} = \frac{v_1^2}{2\,g}$ (Ec,1)

Aplicamos Conservación de la cantidad de MVTO en el choque elástico (Posición B):

$\sum \overset{\to +}{\rho}_{antes} = \sum \overset{\to +}{\rho}_{despues}$

$m_1 \cdot \mu_1 + m_2 \cdot \cancel{\mu_2} = m_1 (-v_1) + m_2 v_2$

$v_1 = \frac{m_2 v_2 - m_2 \mu_1}{m_1}$ (Ec,2)

Conservación de la energía mecánica entre A y B para m_1 antes del choque:

$EM_A = \mathrm{EM}_B \Rightarrow m_1 \cdot g \cdot h_{AB} = \frac{1}{2} m_1 \mu_1^2 \Rightarrow$

$\mu_1 = \sqrt{2g \cdot h_{AB}} = \sqrt{2\,(9,8)\,(5)} \Rightarrow \mu_1 = 9,9\,\mathrm{m/s}$

Aplicamos la ecuación del coeficiente de restitución (e) en el choque elástico e=1.

$e = \frac{v_2 - v_1}{\mu_1 - \mu_2} \Rightarrow 1\,(\mu_1 - \cancel{\mu_2}) = v_2 - v_1 \Rightarrow$

$v_2 = 9,9 + v_1$ (Ec,3) en (Ec,2)

$m_1 v_1 = m_2\,(9,9 + v_1) - m_1 \mu_1$

$m_1 v_1 - m_2 v_1 = m_2\,(9,9) - m_1 \mu_1$

$5v_1 - 10v_1 = 10\,(9,9) - 5\,(9,9)$

$-5v_1 = 49,5 \Rightarrow [v_1 = -9,9\,\mathrm{m/s}] \Rightarrow Hacia\,la\,izquierda.$

en (Ec,1) $h_{\text{máx }1} = \frac{(9,9)^2}{2(9,8)} \Rightarrow h_{\text{máx }1} = 5\,\mathrm{m}$

en (Ec,3) $v_2 = 0\,\mathrm{m/s} \Rightarrow$ Resp (b)

Conclusión: no hay pérdida de energía en choque elástico.

Ejercicio 4.1.0.12. *Dos carritos de igual nada 0,25 kg se colocan sobre una pista sin fricción que tiene un resorte ligero de constante de fuerza K = 50 N/m unido al extremo derecho de la pista, como se muestra en la Fig. 4.11, al carrito de la izquierda se le da una velocidad inicial de 3m/s hacia la derecha y el otro a la derecha del primero está inicialmente en reposo. Si los carros chocan elásticamente, determinar:*

1. *La velocidad de cada uno justo después del primer choque*
2. *La compresión máxima del resorte*
3. *Se dispara horizontalmente una bala de 0,01*

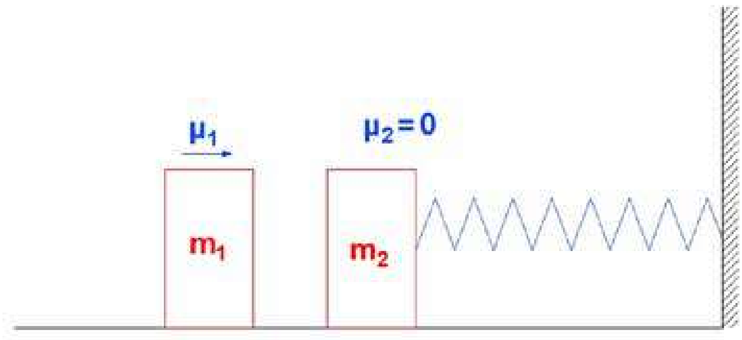


Figura 4.11. Choque de un carrito con un resorte.

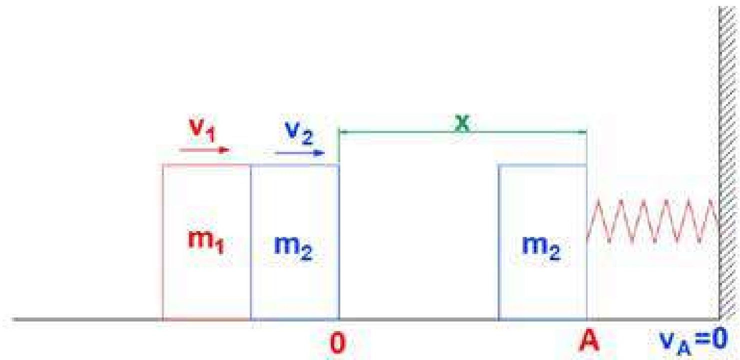


Figura 4.12. Choque de dos carritos luego de impulsarse por el resorte.

Datos:

$m_1 = m_2 = m = 0,25\,\mathrm{kg}$

$k = 50\,\mathrm{N/m}$

$\mu_1 = 3\,\mathrm{m/s}$

$\mu_2 = 0$

a) $v_1 =?$

$v_2 =?$

b) $\mathrm{x} =?$

Resolución: aplicamos conservación de la cantidad de MVTO.

$\sum \overset{\rightarrow +}{\rho}_{antes} = \sum \overset{\rightarrow +}{\rho}_{despues}$

$\cancel{m_1}\mu_1 + m_2\cancel{\mu_2} = \cancel{m_1}v_1 + \cancel{m_2}v_2$

$v_2 = \mu_1 - v_1 \Rightarrow v_2 = 3 - v_1 \text{ (Ec,1)}$

Para choque elástico:

$e = 1 \Rightarrow e\frac{v_2 - v_1}{\mu_1 - \mu_2} \Rightarrow 1\,(\mu_1) = v_2 - v_1 \Rightarrow$

$v_2 = 3 + v_1 \text{ (Ec,2) en (Ec,1)}$

$$3 + v_1 = 3 - v_1 \Rightarrow 2v_1 = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{c} v_1 = 0 \\ v_2 = 3\,\mathrm{m/s} \end{array}\right\} \text{Resp (a)}$$

b) Aplicamos la conservación de energía para m_2 después del choque entre O y A

$\mathrm{EM}_O = EM_A \therefore EC_O = EP_{EA} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow$

$x = \sqrt{\frac{mv_2^2}{k}} = \sqrt{\frac{(0{,}25)(3)^2}{50}} \Rightarrow x = 0,21\,\mathrm{m} \Rightarrow \text{Resp (b)}$

Ejercicio 4.1.0.13. *Se dispara horizontalmente una bala de 0,01 kg (m_1) hacia un bloque de madera de 10 kg (m_2) que inicialmente está en reposo sobre la mesa, la base se incrusta en el bloque e inmediatamente este conjunto choca con un segundo bloque estacionario de 10 kg (m_3) como demuestra en la Fig. 4.13 si el coeficiente de fricción entre los bloques y la cubierta de la mesa es de 0,20. Si luego del primer choque el sistema ($m_1 + m_2$) recorre 4 cm antes de quedar en reposo, en tanto que después del segundo choque (m_3) se desliza 36 cm antes de detenerse. Determinar:*

a. La velocidad de la bala antes del primer choque

b. La velocidad del sistema ($m_1 + m_2$) después de la colisión.

c. La velocidad del bloque (m_3) después del choque.

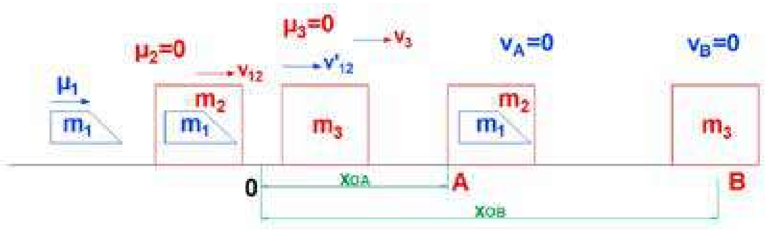


Figura 4.13. Choques y movimientos de una bala al impactar contra los bloques.

Datos:

$m_1 = 0,01\,\mathrm{kg}$

$m_2 = 10\,\mathrm{kg}$

$\mu_2 = 0$

$\mu_3 = 0$

$m_3 = 10\,\mathrm{kg}$

$\mu_c = 0,20$

$x_{OA} = 4\,\mathrm{cm} = 0,04\,\mathrm{m}$

$v_A = 0$

$x_{OB} = 36\,\mathrm{cm} = 0,36\,\mathrm{m}$

$v_B = 0$

a) $\mu_1 = ?$

b) $\mathrm{v}_{12} = ?$

c) $\mathrm{v}_3 = ?$

Resolución: primer choque: (inelástico)

$\sum \overset{\rightarrow +}{\rho}_{antes} = \sum \overset{\rightarrow +}{\rho}_{despues}$

$m_1\mu_1 + m_2\mu_2 = (m_1 + m_2)\, v_{12}$

$\mu_1 = \frac{(m_1+m_2)v_{12}}{m_1}$ (Ec,1)

Segundo Choque:

$\sum \overset{\rightarrow+}{\rho}_{antes} = \sum \overset{\rightarrow+}{\rho}_{despues}$

$(m_1 + m_2)\, v_{12} + m_3\cancel{\mu_3} = (m_1 + m_2)\, v'_{12} + m_3 v_3$

$v_{12} = \frac{(m_1+m_2)v'_{12}+m_3 v_3}{(m_1+m_2)}$ (Ec,2)

Aplicamos el teorema del trabajo y energía para $(m_1 + m_2)$ después del choque:

$\text{EM}_O = \cancel{EM_A} + W_{FROZ\ OA}$

$\frac{1}{2}\,(m_1 + m_2)\, v'^2_{12} = froz_{OA} \cdot x_{OA}$ (Ec,3)

$froz_{OA} = \mu_c \cdot N_{12} \quad ; \quad N_{12} = (m_1 + m_2)\, g$

$froz_{OA} = 0,20\,(0,01 + 10)\, 9,8 = 19,62\,\text{N}$

En (Ec,3)

$\sqrt{v'^2_{12}} = \sqrt{\frac{19{,}62(0{,}04)(2)}{0{,}01+10}}$

$v'^2_{12} = 0,396\,\text{m/s}$

Aplicamos el teorema del trabajo y energía para m_3 después del segundo choque:

$\text{EM}_O = \cancel{EM_B} + W_{FROZ\ OB}$

$\frac{1}{2} m_3 {v_3}^2 = froz_{OB} \cdot x_{OB}$ (Ec,4)

$froz_{OB} = \mu_c \cdot N_3 \quad ; \quad N_3 = m_3\, g$

$froz_{OB} = 0,20\,(10)\,(9,8) \Rightarrow froz_{OB} = 19,6$ en (Ec,3)

$v_3 = \sqrt{\frac{2(19{,}6)(0{,}36)}{10}} \Rightarrow v_3 = 1,188\,\text{m/s} \Rightarrow$ Resp (c)

en (Ec,2) : $v_{12} = \frac{(0{,}01+10)(0{,}396)+10(1{,}188)}{(0{,}01+10)}$

$v_{12} = 1,583\,\text{m/s} \Rightarrow$ Resp (b)

en (Ec,1) : $\mu_1 = \frac{(0{,}01+10)1{,}583}{0{,}01} = 1\,583 \Rightarrow$ Resp (a)

Ejercicio 4.1.0.14. *La fuerza ejercida sobre un cuerpo de masa de 100 gr aumentara de acuerdo con la ecuación F = 10 + 12t, en donde t (s) y F(N), Determinar:*

a. *La impulsión de la fuerza en los dos primeros segundos que actúa.*

b. *¿Durante cuantos segundos debe actuar la fuerza para que la impulsión sea igual a 200 Ns?*

c. *¿Cuál es la velocidad de la masa de 100 g, al cabo de este tiempo, si su velocidad inicial fue de 5 m/s?*

Datos:

$F = 10 + 2t\,(\text{Ec},1)$

$m = 100\,\text{g} = 1\,\text{kg}$

$\text{a)}\,\text{I}_{0-2} = ? \quad \left.\begin{array}{l} t_0 = 0\,\text{s} \\ t_2 = 2\,\text{s} \end{array}\right\}$

$\text{b)}\,\text{t} = ?$

$I = 200\,\text{Ns}$

$\text{c)}\text{v}_t = ?$

$v_0 = 5\,\text{m/s}$

$\text{c)}\,\text{v} = ?$

$t = 5\,\text{s}$

$v_0 = 5\,\text{m/s}$

$I = 200\,\text{Ns}$

Resolución:

$I = \int\limits_0^t F\,dt = \int\limits_0^t (10 + 12t)\,dt \Rightarrow$

$I = 10\,t + 6\,t^2|_0^t \Rightarrow$

$I = 10\,t + 6\,t^2 \quad (\text{Ec},2)$

Para t= 2 s

$I_2 = 10\,(2) + 6(2)^2 \Rightarrow I_2 = 44\,\text{Ns} \Rightarrow \text{Resp}\,(\text{a})$

$\text{b)}\;\; t = ? \rightarrow I = 200\,\text{Ns}\,\text{en}\;(\text{Ec},2) \Rightarrow$

$200 = 10\,t + 6\,t^2 \Rightarrow 6\,t^2 + 10\,t - 200 = 0 \Rightarrow$

$t = \frac{-10 \pm \sqrt{(10)^2 - 4(6)(-200)}}{2(6)} \Rightarrow \begin{array}{l} t_1 = 5\,^2\text{s} \\ t_2 = -6,67\,\text{s} \end{array}$

$t = 5\,\text{s} \Rightarrow \text{Resp}\,(\text{b})$

Aplicamos:

$I = \Delta\rho$

$200 = mv - mv_0 \Rightarrow$

$v = \frac{200+0{,}1(5)}{0{,}1}$

$v = 2\,005\,\mathrm{m/s} \Rightarrow \mathrm{Resp\,(c)}$

Ejercicio 4.1.0.15. *Dos partículas de 2 kg y 3 kg, se mueven con relación a un observador de velocidades de (10 m/s; 225° con x) y (12 m/s; con 120° con x) respectivamente, si se encuentran en los puntos (posiciones) (0, 7, 2) m y (-3, 8, 0) m respectivamente, determinar:*

a. La posición del CM.

b. La velocidad del CM

c. La cantidad de movimiento lineal del sistema respecto al CM.

Datos:

$m_1 = 2\,\mathrm{kg}$

$m_2 = 3\,\mathrm{kg}$

$\overrightarrow{\mu_1} = \left(-7,07\,\overrightarrow{i} - 7,07\,\overrightarrow{j}\right)\,\mathrm{m/s}$

$\overrightarrow{\mu_2} = \left(-6\,\overrightarrow{i} + 10,4\,\overrightarrow{j}\right)\,\mathrm{m/s}$

$\overrightarrow{r_1} = \left(0\,\overrightarrow{i} + 7\,\overrightarrow{j} - 2\,\overrightarrow{k}\right)\,\mathrm{m}$

$\overrightarrow{r_2} = \left(-3\,\overrightarrow{i} + 8\,\overrightarrow{j} + 0\,\overrightarrow{k}\right)\,\mathrm{m}$

a) $\overrightarrow{r_{CM}} = ?$

b) $\overrightarrow{\mu_{CM}} = ?$

c) $\overrightarrow{\rho_{CM}} = ?$

Respuesta (*a*): La posición estará dada por:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{r_{CM}} &= \frac{m_1\overrightarrow{r_1} + m_2\overrightarrow{r_2}}{m_1 + m_2} \\
&= \frac{2\left(0\,\overrightarrow{i} + 7\,\overrightarrow{j} - 2\,\overrightarrow{k}\right) + 3\left(-3\,\overrightarrow{i} + 8\,\overrightarrow{j} + 0\,\overrightarrow{k}\right)}{2+3} \\
&= \frac{14\,\overrightarrow{j} - 4\,\overrightarrow{k} - 9\,\overrightarrow{i} + 24\,\overrightarrow{j}}{5} \\
&= \left(-1,8\,\overrightarrow{i} + 7,6\,\overrightarrow{j} - 0,8\,\overrightarrow{k}\right)\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

Respuesta (b): La velocidad de masa será:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mu_{CM}} &= \frac{m_1\overrightarrow{\mu_1}+m_2\overrightarrow{\mu_2}}{m_1+m_2}\\
&= \frac{2\left(-7,07\overrightarrow{i}-7,07\overrightarrow{j}\right)+3\left(-6\overrightarrow{i}+10,4\overrightarrow{j}\right)}{5}\\
&= \frac{-14,14\overrightarrow{i}-14,14\overrightarrow{j}-18\overrightarrow{i}+31,2\overrightarrow{j}}{5}\\
&= \frac{-32,14\overrightarrow{i}+17,06\overrightarrow{j}}{5}\\
&= \left(-6,43\overrightarrow{i}+3,4\overrightarrow{j}\right)\ m/s
\end{aligned}$$

Respuesta (c): La cantidad de movimiento lineal del sistema será:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\rho_{CM}} &= m\cdot\overrightarrow{\mu_{CM}}\\
&= 5\left(-6,43\overrightarrow{i}+3,4\overrightarrow{j}\right)\\
&= \left(-32,15\overrightarrow{i}+17\overrightarrow{j}\right)kg\cdot m/s
\end{aligned}$$

Ejercicio 4.1.0.16. *Un automóvil de 7 500 kg se mueve inicialmente hacia el este (+ x) a una velocidad de 15 m/s, choca contra un auto de 8 600 kg que se mueve con una velocidad de (26 m/s; 310° con x), después de la colisión los vehículos se mantienen unidos, determinar:*

a. La velocidad (vector) común de los autos inmediatamente después del impacto

b. La pérdida de energía cinética durante la colisión.

Datos:

$m_1 = 7\,500\,\mathrm{kg}$

$\overrightarrow{\mu_1} = \left(15\overrightarrow{i}+0\overrightarrow{j}\right)\mathrm{m/s}$

$\overrightarrow{\mu_2} = (26\mathrm{m/s}\,;\,310°\,con\,x)$

$\overrightarrow{\mu_2} = \left(16,7\overrightarrow{i}-19,9\overrightarrow{j}\right)\mathrm{m/s}$

$Choque\ inelstico: e = 0$

a) $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v} = ?$

b)$\mathrm{EC_{perdida}} = ?$

Respuesta (a): Para hallar la velocidad, primeramente nótese que:

$$\sum \overset{\rightarrow +}{\rho}_{antes} = \sum \overset{\rightarrow +}{\rho}_{despues}$$
$$m_1\overrightarrow{\mu_1} + m_2\overrightarrow{\mu_2} = (m_1 + m_2)\,\overrightarrow{v}$$

despejando $\overrightarrow{v}$ obtenemos lo deseado:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v} &= \frac{7\,500\left(15\,\overrightarrow{i}\right) + 8\,600\left(16{,}7\,\overrightarrow{i} - 19{,}9\,\overrightarrow{j}\right)}{(7\,500 + 8\,600)} \\
&= \frac{256\,120\,\overrightarrow{i} - 171\,140\,\overrightarrow{j}}{16\,100} \\
&= \left(15{,}9\,\overrightarrow{i} - 10{,}6\,\overrightarrow{j}\right)\,\mathrm{m/s} \\
&= (19{,}4\,\mathrm{m/s}\,;326{,}3°) \qquad \text{(En coordenadas polares)}
\end{aligned}$$

Respuesta (b): La energía perdida estará dada por:

$$\begin{aligned}
\mathrm{EC}_{\mathrm{perdida}} &= \mathrm{EC}_{\mathrm{antes}} \\
&= \mathrm{EC}_{\mathrm{despues}} \\
&= \left[\frac{1}{2}m_1{\mu_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{\mu_2}^2\right] - \left[\frac{1}{2}\,(m_1 + m_2)\,v^2\right] \\
&= \left[\frac{1}{2}\,(7\,500)\,(15)^2 + \frac{1}{2}\,(8\,600)\,(26)^2\right] - \left[\frac{1}{2}\,(16\,100)\,(19{,}1)^2\right] \\
&= 3\,750\,550 - 2\,936\,720{,}5 \\
&= 813\,829{,}5\,J
\end{aligned}$$

Ejercicio 4.1.0.17. *Un cuerpo de masa igual a 3,6 kg y velocidad inicial de 6 m/s, sufre una colisión elástica directa con otro cuerpo que inicialmente está en reposo, después del impacto, el primer cuerpo continua en su dirección y sentido de movimiento original a razón de 2,4 m/s, determinar:*

a. *La velocidad del segundo cuerpo después de la colisión.*

b. *La masa del segundo cuerpo.*

c. *Si el choque fuera inelástico, cuáles serían las velocidades finales y la energía perdida durante la colisión.*

Datos:

$m_1 = 3,6\,\mathrm{kg}$

$\mu_1 = 6\,\mathrm{m/s}$

$\mu_2 = 0$

$v_1 = 2,4\,\mathrm{m/s}$

a) $v_2 = ?$

b)$m_2 = ?$

c)$choque\,inelastico$

$v_1 = v_2 = v = ?$

$\mathrm{EC_{perdida}} = ?$

Resolución: choque frontal:

$\sum \overset{\rightarrow +}{\rho}_{antes} = \sum \overset{\rightarrow +}{\rho}_{despues}$

$m_1\mu_1 + m_2\cancel{\mu_2} = m_1v_1 + m_2v_2$

$m_2v_2 = 3,6\,(6) - 3,6\,(2,4)$

$m_2 = \frac{12{,}96}{v_2}$ (Ec,1)

Choque elástico:

$e = 1 = \frac{v_2 - v_1}{\mu_1 - \mu_2}$

$\mu_1 = v_2 - v_1$

$v_2 = \mu_1 + v_1 = 2,4 + 6 \Rightarrow$

$v_2 = 8,6\,\mathrm{m/s} \Rightarrow \mathrm{Resp\,(a)}$

en (Ec,1) $m_2 = \frac{12{,}96}{8{,}6} \Rightarrow m_2 = 1,5\,\mathrm{kg} \Rightarrow \mathrm{Resp\,(b)}$

Choque inelástico:

$\sum \overset{\rightarrow +}{\rho}_{antes} = \sum \overset{\rightarrow +}{\rho}_{despues}$

$m_1\mu_1 + m_2\cancel{\mu_2} = (m_1 + m_2)\,v \Rightarrow v\frac{3{,}6(6)}{(3{,}6+1{,}5)}$

$v = 4,23\,\mathrm{m/s} \Rightarrow \mathrm{Resp\,(c)}$

$\mathrm{EC_{perdida}} = E_O - E_F = \left[\frac{1}{2}m_1{\mu_1}^2 + m_2{\mu_2}^2\right] - \frac{1}{2}\,(m_1 + m_2)\,v^2$

$\mathrm{EC_{perdida}} = \frac{1}{2}\,(3,6)\,(6^2) - \frac{1}{2}\,(3,6 + 1,5)\,(4,23)^2 \Rightarrow \mathrm{EC_{perdida}} = 19,2\,\mathrm{J} \Rightarrow \mathrm{Resp\,(c)}$

4.2. Ejercicios propuestos

Ejercicio 4.2.0.1. *Una partícula de 3,0 kg tiene una velocidad de* $\left(3\,\overrightarrow{i} - 4\,\overrightarrow{j}\right)$ *m/s encuentre los componentes de la cantidad de MVTO. X e Y además de la magnitud de su momento total.*

Respuestas: $a)$ 9 $b)$ 12 $c)$15

Ejercicio 4.2.0.2. *Una bola de boliche de 7,00 kg se mueve en línea recta a 3,00 m/s ¿qué tan rápido debe moverse la bola de ping-pong de 2,45 g en una línea recta de manera que las dos bolas tengan la misma cantidad de MVTO?*

Respuesta: $8\ m/s$

Ejercicio 4.2.0.3. *La fuerza* Fx *que actúa sobre una partícula de 2 kg varia en el tiempo, como muestra la Fig. 4.14. Encuentre:*

a. *El impulso de la fuerza.*

b. *La velocidad final de la partícula si inicialmente está en reposo.*

c. *Su velocidad final si al principio se mueve a lo largo del eje x con una velocidad de -2 m/s.*

d. *La fuerza promedio ejercida sobre la partícula en el espacio de tiempo* $t_i = 0$ *a* $t_f = 5\,\mathrm{s}$

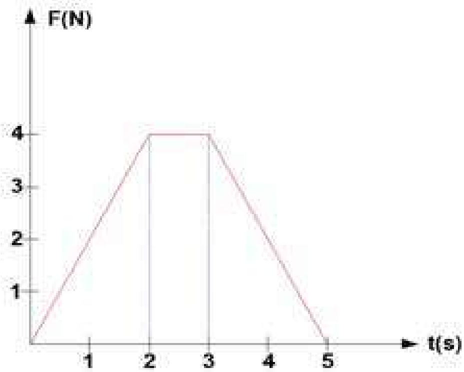


Figura 4.14. Variación de la fuerza con respecto al tiempo.

Respuestas: $a)$ 12 $kg \cdot m/s$ $b)$ 6 m/s $c)$ 4 m/s $d)$ 2,4 N

Ejercicio 4.2.0.4. *Si la cantidad de MVTO de un objeto se duplica en magnitud, responda:*

a. *¿Qué ocurre con su energía cinética?*

b. *Si la energía cinética de un objeto se triplica ¿Qué sucede con su cantidad de MVTO?*

Respuestas: a) La energía cinética se duplica b) La cantidad de MVTO final disminuye en 2/3

Ejercicio 4.2.0.5. *Un balón de fútbol de 0,50 kg se lanza con una velocidad de 15 m/s. Un receptor estacionario atrapa la pelota y la detiene en 0,020 s.*

a. *¿Cuál es el impulso dado al balón?*

b. *¿Cuál es la fuerza promedio ejercida sobre el receptor?*

Respuestas: a) -7,5 b) 375 N

Ejercicio 4.2.0.6. *Un jugador de tenis recibe un tiro con una bola (0,060 kg) que viaja horizontalmente a 50 m/s y lo regresa con la bola moviéndose horizontalmente a 40 m/s con la dirección opuesta, ¿cuál es el impulso dado a la bola por la raqueta?*

Respuesta: $5,4kg \cdot m/s$

Ejercicio 4.2.0.7. *Desde una altura de 60 m y a una tasa de 0,25 L/s cae agua sin salpicar dentro de una cubeta de 0,75 kg que esta sobre una balanza. Si la cubeta originalmente está vacía, ¿cuánto registra la balanza después de 3 s?*

Respuesta: 14,7

Ejercicio 4.2.0.8. *Carros de aire idénticos (m = 200 g) están equipados con resortes idénticos (k = 3 000 N/m). Los carros que se mueven uno hacia el otro con velocidades de 3 m/s sobre una pista de aire horizontal. Chocan y comprimen los resortes Fig. 4.15. Encuentre la compresión máxima de cada resorte.*

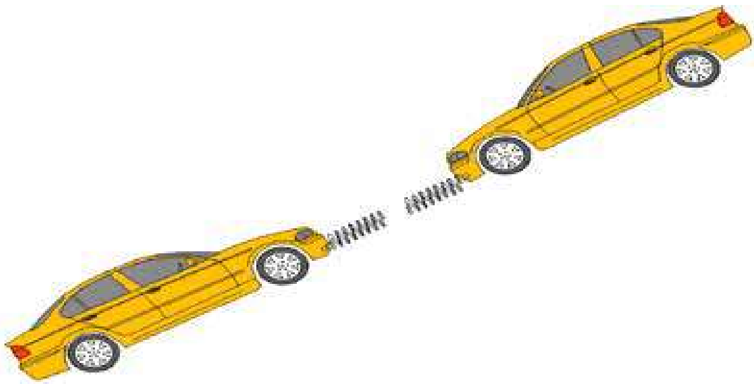


Figura 4.15. Choque de dos vehiculos que comprimen sus resortes.

Respuesta: 0,0245 m

Ejercicio 4.2.0.9. *Un meteorito de 2 000 kg tiene una velocidad de 120 m/s justo antes de chocar de frente con la tierra. Determine la velocidad de retroceso de la tierra (*$5,98 \times 10^{24}$ *kg de masa)*

Respuesta: $25 \times 10^{-18}\,\mathrm{m/s}$

Ejercicio 4.2.0.10. *Gayle corre a una velocidad de 4 m/s y se lanza sobre un trineo que esta inicialmente en reposo sobre la cima de la colina cubierta de nieve sin fricción. Después de que ella y el trineo ha descendido una distancia vertical de 5 m, su hermano esta inicialmente en reposo, se monta detrás de ellas y juntos continúan bajando por la colina, ¿cuál es su velocidad al final de la pendiente si el descenso vertical total es de 15 m? Si la masa de Gayle es de 50 kg, la del trineo de 5 kg y la de su hermano 30 kg*

Respuesta: 2,35 m/s

Ejercicio 4.2.0.11. *Una bala de 10 g es detenida por un bloque de madera (m = 500 kg). La velocidad de la combinación bala más madera inmediatamente después del choque es 0,600 m/s ¿Cuál fue la velocidad original de la bala?*

Respuesta: 300,6 m/s

Ejercicio 4.2.0.12. *Un corredor rápido de futbol americano de 90 kg que se desplaza hacia el norte con una velocidad de 10 m/s es derribado por un oponente de 120 kg que corre hacia el sur con una velocidad de 4 m/s. Si el choque es perfectamente inelástico y de frente. Determinar:*

a. *Calcule la velocidad y dirección de los jugadores justo después del derribe.*

b. *Determine la energía perdida como consecuencia del choque. Explique donde queda la energía faltante.*

Respuestas: *a*) $2\overrightarrow{j}\,m/s$ *b*) 420 J

Ejercicio 4.2.0.13. *Un auto de 1 200 kg que viaja inicialmente con una velocidad de 25 m/s con rumbo al este choca con la parte trasera de la camioneta de 9 000 kg que se mueve en la misma dirección de 20 m/s Fig. 4.16. La velocidad del auto justo después del choque es de 18 m/s en dirección este. Determinar:*

a. *¿Cuál es la velocidad de la camioneta justo después del choque?*

b. *¿Cuánta energía mecánica se pierde en el choque? Explique que pasa con la energía perdida.*

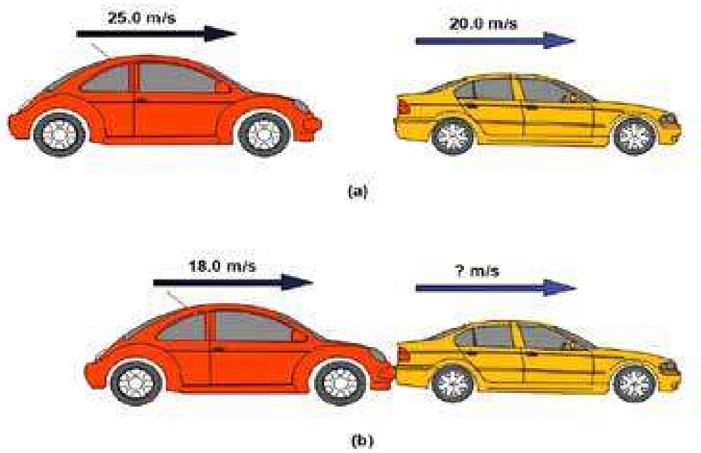


Figura 4.16. Choque de dos vehículos con la misma dirección. a) Momento antes del choque de los vehículos. b) Momento después del choque de los vehículos.

Respuestas: *a*) 20,93 m/s *b*) $9,3 \times 10^3$ joules

Ejercicio 4.2.0.14. *Un vagón de ferrocarril de* $2,5 \times 10^4$ *kg de masa que se mueve con una velocidad de 4 m/s choca y se conecta con otros tres vagones de ferrocarril acoplados, cada uno de la misma masa que el primero y moviéndose en la misma dirección con una velocidad de 2 m/s.*

a. *¿Cuál es la velocidad de los cuatro vagones después del choque?*

b. ¿Cuánta energía se pierde en el choque?

Respuestas: *a*) 2,5 m/s *b*) $3,75 \times 10^4$ joules

Ejercicio 4.2.0.15. *Un patinador de hielo de 75 kg se mueve a 10 m/s choca contra un patinador estacionario de igual masa. Después del choque, los dos patinadores se mueven como uno solo a 5 m/s. La fuerza promedio que un patinador humano puede experimentar sin romperse un hueso es de 4 500 N. Si el tiempo de impacto de 0,10 s. ¿Se rompe algún hueso?*

Respuesta: No

Ejercicio 4.2.0.16. *Un bloque de 0,10 kg se suelta el reposo desde la parte superior de una pendiente sin fricción de 40°. Cuando ha descendido una distancia vertical de 1,5 m, una bala de 0,015 kg se dispara contra el bloque a lo largo de una trayectoria paralela a la pendiente y momentáneamente detiene el bloque. Determinar:*

1. *Encuentre la velocidad de la bala justo antes de hacer impacto.*
2. *¿Qué velocidad es necesaria para llevar el bloque hacia arriba de la pendiente hasta su posición inicial?*

Respuestas: *a*) $36,17 \overrightarrow{i}\ m/s$ *b*) 77,69 *m/s*

Ejercicio 4.2.0.17. *Como indica en la Fig. 4.17. Una bala de masa m y velocidad v atraviesa la plomada de un péndulo de masa M. La bala sale con una velocidad v/2. La plomada del péndulo esta sostenida por medio de una barra rígida de longitud L y masa despreciable. ¿Cuál es el valor mínimo de v para que la plomada del péndulo apenas realice un círculo vertical completo?*

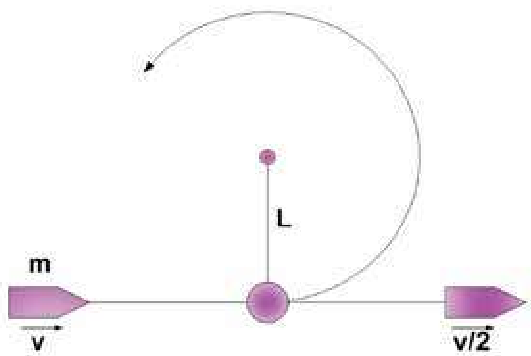


Figura 4.17. Impacto de una bala contra un péndulo.

Respuesta: $\left(\frac{2M}{m}\right)\sqrt{5gL}$

Ejercicio 4.2.0.18. *Una bala de 12 g se dispara contra un bloque de madera de 100 g inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal. Después del impacto el bloque se desliza 7,5 m antes de detenerse. Si el coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie es 0,65, ¿Cuál es la velocidad de la bala inmediatamente antes del impacto?*

Respuesta: 91,28 m/s

Ejercicio 4.2.0.19. *Una bala de 7 g disparada contra un bloque de madera de 1 kg fijo en una prensa de tornillo penetra hasta una profundidad de 8 cm. Después de que se quita la prensa, el bloque de madera se coloca sobre una superficie horizontal sin fricción y se dispara contra él otra bala de 7 g. ¿A qué profundidad penetra esta segunda bala?*

Respuesta: $38 \times 10^{-7}\ m/s$

Ejercicio 4.2.0.20. *Un bloque de masa $m_1 = 2$ kg se mueve desde el reposo sobre una superficie inclinada a 53° respecto de la horizontal. El coeficiente de fricción cinético entre la superficie y el bloque es $\mu_C = 0,25$.*

a. Si la velocidad del bloque en el pie de la pendiente es de 8 m/s hacia la derecha, determine la altura desde la cual se suelta al bloque.

b. Otro bloque de masa $m_2 = 6$ kg se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal lisa. El bloque m_1 choca contra el bloque m_2. Después del choque los bloques se mantienen unidos y se mueven hacia la derecha. Determine la velocidad de los bloques después del choque.

Respuestas: *a*) 4,01 m *b*) 2 m/s

Ejercicio 4.2.0.21. *Una bala de 20 g se dispara en forma horizontal hacia un bloque de 2,2 lb que se encuentra en reposo sobre una mesa horizontal ($\mu_k = 0,25$). La bala recorre todo el bloque y sale con una rapidez de 900 km/h. Si el bloque se mueve recorriendo 5 m antes de quedar en reposo. Determine la rapidez inicial de la bala*

Respuesta: $497,615\ \overrightarrow{i}\ m/s$

Ejercicio 4.2.0.22. *Dos bloques de masa $m_1 = 4,4$ lb y $m_2 = 8,8$ lb se les pone en libertad desde una altura de 500 cm (trabaje en el SI) sobre una pista lisa (se desprecia la fricción), como la que indica en la Fig. 4.18. Los bloques sufren un choque frontal elástico. Determinar:*

a. Determine las dos velocidades justo antes del choque.

b. Con las ecuaciones correspondientes determine las dos velocidades exactamente después del choque.

c. *Determine la altura máxima a la cual sube cada bloque después del choque.*

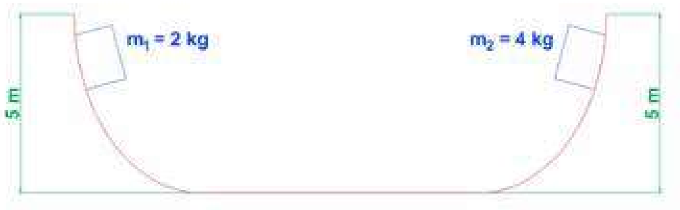


Figura 4.18. Choque de dos masas que caen desde una altura por una pista.

Respuestas: *a*) $9,9\,\overrightarrow{i}\ m/s$ *b*) $16,5\,\overrightarrow{i}\ m/s$ *c*) 0,555 m

Ejercicio 4.2.0.23. *Una masa de 3 kg con una velocidad de* $5\,\overrightarrow{i}\ \mathrm{m/s}$ *choca y queda unida a una masa de 4,4 lb cuya rapidez inicial es de* $(-3\,\overrightarrow{i}\,)\,\mathrm{m/s}$. *Determine la rapidez final del cuerpo.*

Respuesta: 3,2 *m/s*

Ejercicio 4.2.0.24. *En el enfrentamiento de guerra en la Alemania, el tiroteo fue tan fuerte que varias balas colisionaron en el aire y se derritieron. Suponiendo que un proyectil de fusil de la unión de 5 g que se mueve a la derecha de 900 km/h y 20° sobre la horizontal y una alemana de 3 g que se mueve hacia la izquierda a 1 080 km/h y 15° sobre la horizontal. Inmediatamente después de que se unen, ¿Cuál es su velocidad?*

Respuesta: 92,86 m/s

Ejercicio 4.2.0.25. *Un núcleo inestable de* 17×10^{-27} *de masa inicialmente en reposo se desintegra en tres partículas. Una de ellas de* 5×10^{-27}. *Se mueve a lo largo del eje y con una velocidad de* 6×10^{6} *m/s. Otra partícula, de masa* $8,24 \times 10^{-27}$, *se mueve a lo largo del eje x con una velocidad de* 4×10^{6} *m/s. Encuentre:*

a. $10,97 \times 10^{3}\,\mathrm{m/s}$

b. $384,68 \times 10^{-}15\,\mathrm{joules}$

Ejercicio 4.2.0.26. *Un disco de goma de 0,30 kg, inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción, es impactado por un segundo disco igual de 200 g que se mueve inicialmente en la dirección del eje x con una velocidad de 200 cm/s. Después de la colisión, el disco de 200 g tiene una velocidad de 1 m/s a un ángulo* $\theta = 53°$ *con el eje x positivo.*

a. *Determine la velocidad del disco de 0,30 kg después del choque*

b. *Determine la energía cinética que se pierde durante la colisión y exprésela (en fracción o porcentaje).*

Respuesta: 0,684

Ejercicio 4.2.0.27. *Dos discos de un juego de mesa de igual masa, uno naranja y el otro amarillo, sufren una colisión indirecta perfectamente elástica. El disco amarillo esta inicialmente en reposo y es golpeado por el disco naranja que se mueve con una velocidad de 5 m/s. Después del choque el disco naranja se mueve por una dirección que forma un ángulo de 37°, con su dirección inicial de movimiento, y la velocidad del disco amarillo es perpendicular a la del disco naranja (después del choque). Determine la velocidad final de cada disco.*

Respuesta: 3 m/s

Ejercicio 4.2.0.28. *Una bola de billar se desplaza con una rapidez de 18 km/h y chocas con una esferita estacionaria que tiene igual masa. Luego de la colisión, la primera esfera se mueve a 4,33 m/s y un ángulo de 30°, respecto de la dirección inicial del movimiento. Si suponemos que la colisión es elástica (e ignorando la fricción y el movimiento de rotación). Determine la magnitud y dirección de la velocidad de la segunda bola después de la colisión.*

Respuesta: 1,445 m/s

Ejercicio 4.2.0.29. *Una partícula de 3 kg se localiza sobre el eje x en x = 5 m, y una partícula de 4 kg esta sobre el eje x en x = 3 m. Encuentre el centro de nada de este sistema de dos partículas.*

Respuesta: 0,4285 m

Ejercicio 4.2.0.30. *Una molécula de agua se compone de una partícula de oxígeno con dos partículas de hidrógeno unidos a ella. El ángulo entre los dos enlaces es de 106°. Si cada enlace tiene 0,100 nm de largo. Calcule el centro de masa de esta combinación.*

Respuesta: 0,6 nm

Ejercicio 4.2.0.31. *La masa del sol equivale a 329 290 masas de la tierra, y la distancia media del centro el sol al centro de la tierra es igual a* $1,496 \times 10^8\,\mathrm{km}$. *Si se considera a la tierra y al sol como partículas, con cada masa concentrada en su respectivo centro geométrico, ¿A qué distancia del centro del sol está el centro de masa del sistema Tierra-Sol? Compare esta distancia con el radio medio del Sol* ($6,960 \times 10^5\,\mathrm{km}$).

Respuesta: 454,17 km

Ejercicio 4.2.0.32. *La separación entre los átomos de hidrógeno y cloro de la molécula de HCL es de casi* $1,30 \times 10^-10\,\mathrm{m}$. *Determine la posición del centro de masa de la molécula cuando se mide desde el átomo de hidrógeno. (el cloro es 35 veces más masivo que el hidrógeno).*

Respuesta: $1,264 \times 10^-10\,m$

Ejercicio 4.2.0.33. *Una partícula de 2 kg tiene una velocidad de* $\left(2\,\overrightarrow{i} - 3\,\overrightarrow{j}\right)\,\mathrm{m/s}$ *y una partícula de 3 kg tiene una velocidad* $\left(1\,\overrightarrow{i} + 6\,\overrightarrow{j}\right)\,\mathrm{m/s}$. *Encuentre:*

a. La velocidad del centro de masa.

b. La cantidad de MVTO total del sistema.

Respuesta: $\left(7\,\overrightarrow{i} + 12\,\overrightarrow{j}\right)\,\mathrm{kg \cdot m/s}$

Ejercicio 4.2.0.34. *Una partícula de 2 kg tiene una velocidad de* $\overrightarrow{v_1} = \left(2\,\overrightarrow{i} - 10\mathrm{t}\,\overrightarrow{j}\right)\,\mathrm{m/s}$ *donde t está en segundos. Una partícula de 3 kg se mueve con una velocidad constante de* $\overrightarrow{v_2} = 4\,\overrightarrow{i}\,\mathrm{m/s}$. *En t = 0,50 s encuentre:*

a. La velocidad del centro de masa.

b. La aceleración del centro de masa.

c. El momento total del sistema.

Respuestas: *a)* $\left(\frac{16}{5}\overrightarrow{i} - 10\overrightarrow{j}\right)\,m/s$ *b)* $-2\,\overrightarrow{j}\,m/s^2$ *c)* $\left(16\,\overrightarrow{i} - 50\,\overrightarrow{j}\right)\,kg \cdot m/s$

Ejercicio 4.2.0.35. *Una partícula de 3 g se mueve a 3 m/s hacia una partícula estacionaria de 7 g. Determine:*

a. ¿Con qué velocidad se aproxima cada una al centro de masa?

b. ¿Cuál es la cantidad de MVTO de cada partícula, con respecto del centro de masa?

Respuestas: *a)* 0,9 m/s *b)* 0,009 $kg \cdot m/s$

Ejercicio 4.2.0.36. *Romeo entretiene a Julieta entonando su violín en la parte posterior de su barca en agua tranquila. Después de la serenata, Julieta camina lentamente hacia la parte trasera de la barca (en sentido opuesto a la orilla) para acariciar la mejilla de Romeo. Si el bote de 80 kg apunta hacia la playa y si Julieta de 55 kg se mueve 2,7 m hacia romeo de 77 kg, ¿Cuánto se mueve el bote hacia la orilla?*

Respuesta: 0,699 m

Ejercicio 4.2.0.37. *Una bola de golf (m = 47 g) es impactada de manera que sale volando con un ángulo de 45° respecto a la horizontal. El lanzamiento alcanza 0,2 km (trabaje en el SI) sobre un suelo plana. Si el tolete de golf y la bola están en contacto durante 7 s, ¿Cuál es la fuerza promedio del impacto? (Ignore la resistencia del aire).*

Respuesta: $0{,}265\, kg(ms)^2$

Ejercicio 4.2.0.38. *Una bala de 12 g se dispara horizontalmente contra un bloque de madera de 100 g está en reposo sobre una superficie horizontal rugosa, conectada a un resorte sin masa de constante N/m. Si el sistema bala-bloque comprime el resorte 0,800 m ¿Cuál era la velocidad de la bala justo al entrar al bloque?, Suponga que el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es 0,60.*

Respuesta: 274,75 m/s

Ejercicio 4.2.0.39. *Un rifle de caza libre 30-06 dispara una bala de 0,012 kg con una velocidad de orificio de 600 m/s hacia la derecha. El rifle tiene una masa de 4 kg. Determinar:*

a. *¿Cuál es la velocidad de retroceso del rifle cuando sale la bala?*

b. *Si el rifle es detenido por el hombro del cazador en una distancia de 2,5 cm, ¿Cuál es la fuerza promedio ejercida sobre el hombro por el rifle?*

c. *Si el hombro del cazador está parcialmente restringido al retroceder, ¿La fuerza ejercida sobre el hombro seria la misma que en el inciso b?*

Respuestas: $a)\ -1,8\ \overrightarrow{i}$ m/s $\quad b)$ 259,2 N

Ejercicio 4.2.0.40. *Una bala de 8 g se dispara contra un bloque de 2,50 kg originalmente en reposo en el filo de una mesa sin fricción de 1 m de altura Fig. 4.19. La bala permanece en el bloque y luego del choque éste cae al piso a 200 cm del pie de la mesa. Calcular la velocidad inicial de la bala.*

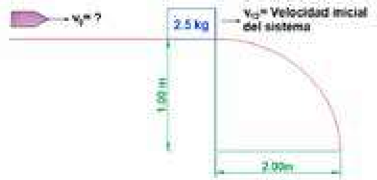


Figura 4.19. Impacto de una bala contra un bloque al borde de una mesa.

Respuesta: 1 962,51 m/s

Ejercicio 4.2.0.41. *Un cuerpo de masa* m_1 = *500 g se deja caer desde el reposo en la parte superior de una risco curvo sin rozamiento de masa* m_2 = *3 000 g, que esta sobre una superficie horizontal sin fricción. Cuando abandona la cuña, la rapidez del bloque es de14,4 km/h hacia la derecha, como se muestra en la Fig. 4.20. Determinar:*

a. ¿Cuál es la rapidez del risco después de que el cuerpo m_1 *llega a la superficie horizontal?*

b. ¿Cuál es la altura h de la cuña?

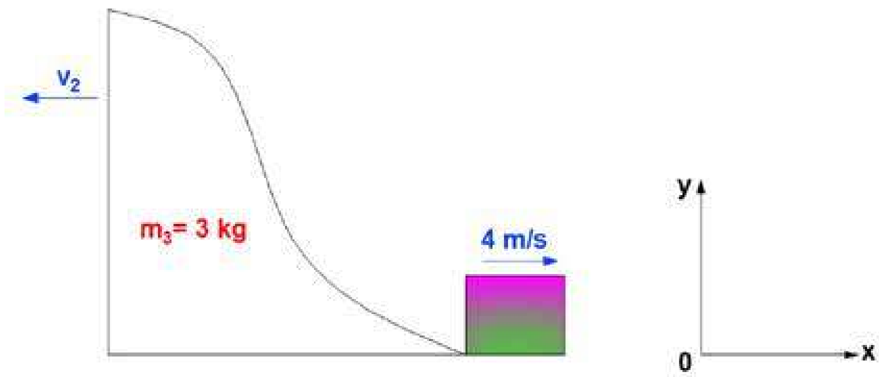


Figura 4.20. Caída de un bloque por una cuña curva.

Respuestas: *a*) -0,67 m/s *b*) 0,815 m

Ejercicio 4.2.0.42. *Dos patinadores sobre hielo se aproximan uno al otro en ángulos rectos. El patinador A tiene una masa de 50 kg y viaja en dirección +x a 2 m/s. El patinador B tiene una masa de 70 kg y se mueve en la dirección +y a 1,5 m/s, chocan y se quedan unidos. Encuentre:*

a. La velocidad final de la pareja.

b. La pérdida de energía cinética debido al choque.

Respuestas: *a*) 1,206 m/s *b*) 91,48 joules

Ejercicio 4.2.0.43. *Un bombero de 75 kg se desliza hacia abajo por un poste con una fuerza friccionante constante de 300 N que frena su movimiento. Una plataforma horizontal de 44,1 lb esta unida a un resorte en el pie del poste para ablandar la caída. El bombero inicia su movimiento desde el reposo a 4 m sobre la plataforma y la constante del resorte de 4 000 N/m. Determine:*

a. *La velocidad del bombero justo antes de que choque con la plataforma.*

b. *La distancia máxima que se comprime el resorte. (Suponga que la fuerza friccionante actúa durante todo el movimiento).*

Respuestas: a) 6,82 m/s b) 0,76 m

Ejercicio 4.2.0.44. *Un jugador de béisbol de 70 kg salta verticalmente hacia arriba para atrapar una pelota de 0,160 kg de masa que viaja horizontalmente con una velocidad de 35 m/s. Si la velocidad vertical del jugador en el instante en el que atrapa la pelota es 0,200 m/s, determine la velocidad del jugador justo de la atrapada.*

Respuesta: 0,184 m/s

Ejercicio 4.2.0.45. *Una bala de 5 g se mueve con una velocidad inicial de 400 m/s y atraviesa un bloque de 1 kg como se ve en la Fig. 4.21. El bloque, al principio en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción, está conectado a un resorte de constante fuerza 900 N/m. Si el bloque se mueve 5 cm hacia la derecha después del impacto encuentre [3], [6], [9]:*

a. *La velocidad a la cual la bala sale del bloque.*

b. *La energía perdida en el choque.*

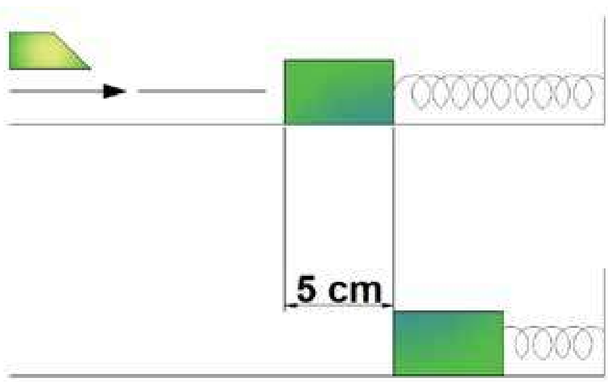


Figura 4.21. Impacto de una bala contra un bloque junto a un resorte.

Respuestas: a) 100 m/s b) 373,875 joules

Bibliografía

[1] D. Barba M and B. Barba, *Física. Fundamentos teórico - prácticos para ciencias e ingenierías*. La Caracola Editores, 2022. [Online]. Available: http://cimogsys.espoch.edu.ec/direccion-publicaciones/public/docs/books/2022-04-11-135829-F%C3%ADsica%20fundamentos.pdf

[2] D. Barba Maggi and B. Barba, *Física. Fundamentos teórico - prácticos de Cinemática, Estática y Dinámica para ciencias e ingenierías*. La Caracola Editores, 2023. [Online]. Available: http://cimogsys.espoch.edu.ec/direccion-publicaciones/public/docs/books/2023-11-07-210053-fisica_fundamentos.pdf

[3] R. Serway, *Física para ciencias e ingeniería: Volumen 1*. CENGAGE Learning, 2018. [Online]. Available: https://books.google.com.ec/books?id=jj9HyQEACAAJ

[4] M. Alonso and E. Finn, *Fisica 1 Mecanica*, ser. Física. Fondo Educación Interamericana, 1987, no. v. 1. [Online]. Available: https://books.google.com.ec/books?id=eKGJAQAACAAJ

[5] D. Halliday, R. Resnick, and J. Walker, *Fundamentals of Physics, Volume 1*. Wiley, 2017. [Online]. Available: https://books.google.com.ec/books?id=4iqVDwAAQBAJ

[6] H. Young, F. Sears, M. Zemansky, and R. Freedman, *Sears-Zemansky física universitaria*. Addison-Wesley, 2009. [Online]. Available: https://books.google.com.ec/books?id=Vlk8zwEACAAJ

[7] O. Aldaz, X. Camacho, M. Tasiguano, and P. Vallejo, *Física problemas propuestos*

y resueltos, quinta ed ed. Escuela Politécnica Nacional, 2000. [Online]. Available: https://archive.org/details/166189457FisicaBuhoEpn/mode/2up?view=theater

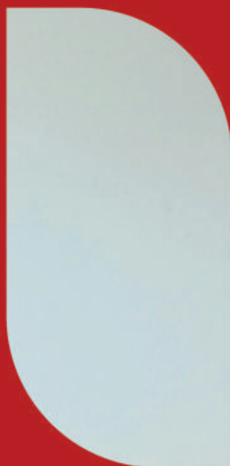
[8] J. McKelvey and H. Grotch, *Física para ciencias e ingeniería*. Ciudad de México, México: Harla, Harper & Row Latinoamericana, 1981.

[9] M. Alonso and O. Rojo, *Física: mecánica y termodinámica*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1986. [Online]. Available: https://books.google.com.ec/books?id=McPUJwAACAAJ

El presente libro de Física está destinada a lectores que ya han cursado al menos un año en carreras de ciencias e ingenierías, está divida en cuatro capítulos de los cuales en las dos primeros se abordan fundamentos teóricos y prácticos de trabajo, potencia y energía con énfasis en ejercicios resueltos y propuestos donde el lector podrá practicar de manera progresiva sus avances; las dos últimos están orientados a el estudio del impulso y cantidad de movimiento lineal con una variedad de aplicaciones prácticas de velocidad, colisiones elásticas e inelásticas y el estudio de las fuerzas que aparecen cuando existe movimiento; el lenguaje utilizado durante toda la obra es sencillo y de fácil comprensión, producto de varios años de experiencia docente tanto en nivel medio como en superior de los autores

Diego Guillermo Barba Maggi. Nacido en Riobamba, Ecuador, en 1980. Experto en Procesos *e-learning* por la Fundación FATLA, ingeniero mecánico recibido de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, magister en Docencia y Currículo para la Educación Superior en la Universidad Técnica de Ambato y doctor de la Universidad de Buenos Aires, Área Ingeniería, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires, Argentina, con tesis calificada sobresaliente. Autor de varias publicaciones en revistas indexadas y libros de Física. Actualmente director del Grupo de investigación GIICYT - ESPOCH y docente investigador de la ESPOCH.

Bernardo Ezequiel Barba Barba. Nacido en Colta, Ecuador, en 1957. Especialista en Computación Aplicada al Ejercicio Docente e ingeniero mecánico recibido de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, magister en Docencia y Currículo para la Educación Superior en la Universidad Técnica de Ambato. Docente investigador de la ESPOCH durante 37 años, mejor egresado de la carrera de Ingeniería Mecánica en el año 1980 y autor de libros de Física. Actualmente, director de ACIBAG "Asesoría en Ciencia Básicas a nivel general", profesor asesor de Física y de nivelación preuniversitaria.



ISBN: 978-9942-51-073-0
9 789942 510730